Параллельность. Сумма углов треугольника

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Аксиома параллельных. Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести двух различных прямых, параллельных данной прямой.

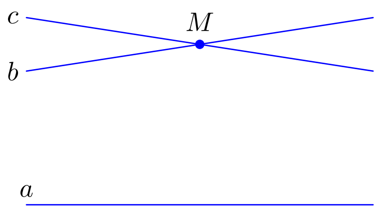

Рис. 1. Невозможно $b \parallel a$ и $c \parallel a$

На рис. 1 показана ситуация, *невозможная* в силу аксиомы параллельных: через точку M, не лежащую на прямой a, проведены две различные прямые b и c, параллельные прямой a.

Задача. Пусть a, b, c — три различные прямые, причём $b \parallel a$ и $c \parallel a$. Докажите, что $b \parallel c$ (*две различные прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой*).

Решение. Предположим, что прямые b и c не параллельны. Тогда они пересекаются в точке M, которая не лежит на прямой a. Возникает невозможная ситуация, изображённая на рис. 1: через точку M проходят две различные прямые, параллельные прямой a. Полученное противоречие с аксиомой параллельных показывает, что $b \parallel c$.

Признак и свойство параллельных прямых

Параллельность прямых тесно связана с равенством углов. Для начала введём нужную терминологию — дадим определения углов, которые образуются при пересечении двух прямых третьей прямой.

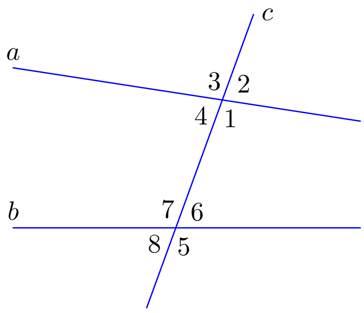

Рис. 2.

Пусть прямые a и b (не обязательно параллельные) пересекаются с прямой c (рис. 2). Как видим, образуются восемь углов: 1, 2, …, 8. Различные пары этих углов имеют определённые названия.

- *Внутренние накрест лежащие углы* — это углы 1 и 7, углы 4 и 6.

- *Внешние накрест лежащие углы* — это углы 2 и 8, углы 3 и 5.
- *Внутренние односторонние углы* —это углы 1 и 6, углы 4 и 7.
- *Внешние односторонние углы* — это углы 2 и 5, углы 3 и 8.
- *Соответственные углы* — это углы 1 и 5, углы 2 и 6, углы 3 и 7, углы 4 и 8.

Признак и свойство параллельных прямых формулируются в терминах внутренних накрест лежащих углов.

Признак параллельности прямых. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Свойство параллельных прямых. Если две прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой возникают равные внутренние накрест лежащие углы.

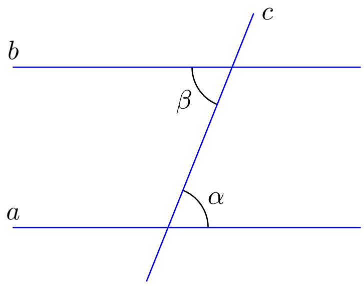

Рис. 3. $a \parallel b \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta$

Данная ситуация изображена на рис. 3. Одновременная справедливость признака и свойства параллельных прямых может быть записана так:

$$a \parallel b \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta. \tag{1}$$

В формуле (1) логическая стрелка вправо — это свойство параллельных прямых; логическая стрелка влево — это признак параллельности прямых.

Для записи «работающих в обе стороны» утверждений типа (1) используется выражение *тогда и только тогда*. Например, словесная формулировка утверждения (1) выглядит следующим образом: *две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны внутренние накрест лежащие углы (образованные при пересечении этих прямых третьей прямой)*.

Отсюда несложно доказать, что справедливы также следующие утверждения (опять-таки предполагается, что две прямые пересечены третьей):

- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда внешние накрест лежащие углы равны;
- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда внутренние односторонние углы в сумме дают 180°;
- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда внешние односторонние углы в сумме дают 180°;
- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда соответственные углы равны.

Вопрос. Верно ли утверждение: 1) точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку; 2) внутренняя точка угла равноудалена от его сторон тогда и только тогда, когда она лежит на биссектрисе угла?

Сумма углов треугольника

Свойство параллельных прямых позволяет вычислить сумму углов треугольника.

Теорема о сумме углов треугольника. Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Через вершину C проведём прямую MN, параллельную стороне AB (рис. 4)

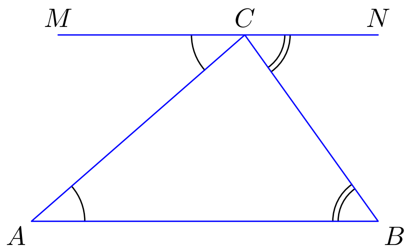

Рис. 4. Сумма углов треугольника

По свойству параллельных прямых имеем: $\angle MCA = \angle A$, $\angle NCB = \angle B$. Но углы MCA, ACB и NCB в сумме составляют развёрнутый угол. Поэтому $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с внутренним углом. Так, угол φ на рис. 5 является внешним углом треугольника ABC.

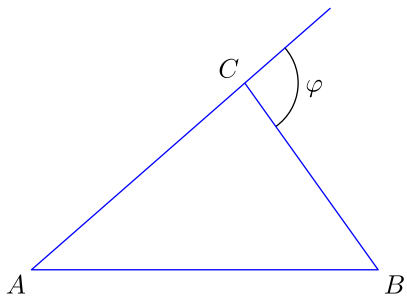

Рис. 5. Внешний угол треугольника

Теорема о внешнем угле. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Так, на рис. 5 имеем: $\varphi = \angle A + \angle B$. Теорема о внешнем угле является простым следствием теоремы о сумме углов треугольника, и вы без труда докажете её самостоятельно.