

Основное тригонометрическое тождество

Косинус и синус угла α , будучи соответственно абсциссой и ординатой точки тригонометрической окружности, не являются независимыми величинами. Их связывает *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Основное тригонометрическое тождество позволяет находить синус угла по известному косинусу или, наоборот, косинус угла по известному синусу. Для определения знака искомой тригонометрической функции требуется дополнительная информация о величине угла (например, в какой четверти расположена точка α).

Пример 1. Вычислить $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

Теперь остаётся извлечь квадратный корень и поставить правильный знак у синуса. Вот для этого и дана дополнительная информация об угле.

Точка α расположена в первой четверти, так что $\sin \alpha > 0$ (рис. 1). Поэтому

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

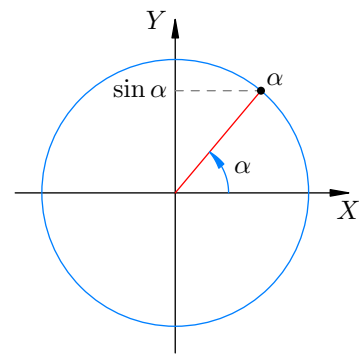


Рис. 1. $\sin \alpha > 0$

Пример 2. Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Действуем по той же схеме. Из основного тригонометрического тождества находим:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Точка α расположена во второй четверти (рис. 2), так что $\cos \alpha < 0$. Стало быть, извлекая корень, ставим знак минус:

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

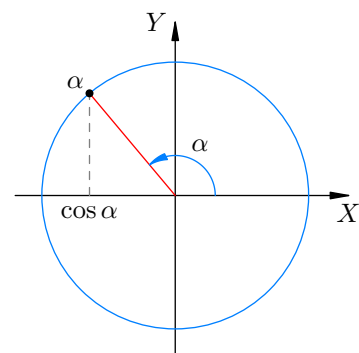


Рис. 2. $\cos \alpha < 0$

Основное тригонометрическое тождество приводит к двум формулам, связывающим соответственно косинус с тангенсом и синус с котангенсом.

1. Пусть $\alpha \neq \pi/2 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тогда $\cos \alpha \neq 0$. Делим обе части равенства (1) на $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

или

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

2. Пусть $\alpha \neq \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тогда $\sin \alpha \neq 0$. Делим обе части равенства (1) на $\sin^2 \alpha$:

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

или

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

Пример 3. Вычислить $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из соотношения (2) находим:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{5}.$$

По основному тригонометрическому тождеству получаем также:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}.$$

Точка α расположена в третьей четверти (рис. 3). Синус и косинус там отрицательны, следовательно:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

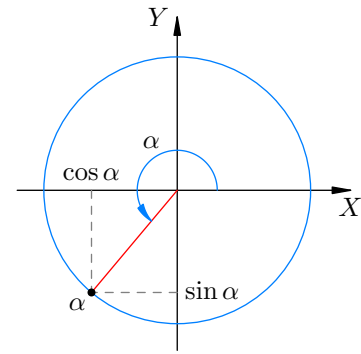


Рис. 3. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$

Пример 4. Вычислить $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Сразу же находим тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Задача свелась к предыдущей, но мы для разнообразия используем формулу (3). Имеем:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{144}{25}} = \frac{25}{169}.$$

Отсюда

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

По условию точка α лежит в четвёртой четверти (рис. 4), так что $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$. Следовательно,

$$\sin \alpha = -\frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

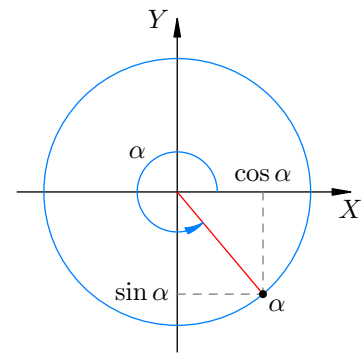


Рис. 4. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$