Доказательство от противного

> Reductio ad absurdum — острейшее оружие математика. Это гамбит гораздо более тонкий, чем шахматный: шахматист может пожертвовать пешкой или даже фигурой, но математик предлагает в жертву всю партию.
>
> Г. Х. Харди

1. (*Всеросс., 2018, МЭ, 9.1*) Игорь сложил десять подряд идущих натуральных чисел, затем разделил полученную сумму на сумму следующих десяти натуральных чисел. Могло ли у него получится число 0,8?

2. (*«Курчатов», 2017, 7.3, 9.2*) В популярной интеллектуальной игре «Столкновение умов» принимает участие 10 человек. К концу игры каждый игрок набирает целое число очков. Оказалось, что в полуфинале все количества набранных игроками очков имеют разные последние цифры. Докажите что в финале игры (где игроки суммарно наберут вдвое больше очков, чем в полуфинале) такой ситуации произойти не может.

3. (*ММО, 2016, 9*) Сумма трёх положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

4. (*ОММО, 2016, 9–10*) Вася и Маша поженились в 1994 году. С тех пор у них родились четверо детей, и новый 2015 год встречали уже все шестеро. По странному совпадению все дети родились 6 февраля, а сегодня, 7 февраля 2016 года, Вася заметил, что возраст старшего равен произведению возрастов трёх младших. Докажите, что в этой семье есть близнецы.

5. (*ММО, 2015, 8*) Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

Нет

6. (*Всеросс., 2018, МЭ, 9.6*) Бригада рабочих делает ремонт в квартире. Чтобы не испортить пол в комнате (клетчатый квадрат размером 4×4), они расстелили 13 двухклеточных ковриков по линиям сетки. Внезапно оказалось, что один коврик понадобился в другой комнате. Докажите, что рабочие смогут его выбрать так, чтобы ремонт в квартире можно было продолжать, не испортив пол.

7. (*Олимпиада им. Эйлера, 2015, РЭ*) Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.

8. (*Олимпиада им. Эйлера, 2014, РЭ*) Ученик за одну неделю получил 13 оценок (из набора 2, 3, 4, 5), среднее арифметическое которых — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

9. (*Олимпиада им. Эйлера, 2014, РЭ*) Дано 2014 попарно различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть равно произведению шести попарно различных простых чисел.

10. (*Всеросс., 2017, финал, 9.5*) На доске написаны $n > 3$ различных натуральных чисел, меньших, чем $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$. Для каждой пары этих чисел Серёжа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он бы получил $100 = 14 \cdot 7 + 2$ и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных.

11. (*Всеросс., 2014, финал, 9*) По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

12. (*Всеросс., 2015, финал, 9*) На доске написаны $N \geqslant 9$ различных неотрицательных чисел, меньших единицы. Оказалось, что для любых восьми различных чисел с доски на ней найдётся девятое, отличное от них, такое, что сумма этих девяти чисел целая. При каких N это возможно?

Только при $N = 9$

13. (*Всеросс., 2017, финал, 9.3*) Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, ..., 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъёмностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег?

14. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10*) Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них — 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

15. (*Всеросс., 2015, РЭ, 10–11*) Целые числа a, x_1, x_2, ..., x_{13} таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{13}).$$

Докажите, что $a x_1 x_2 \ldots x_{13} = 0$.

16. (*Всеросс., 2015, финал, 10*) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k + 1$?

Нет

17. (*Всеросс., 2014, финал, 10*) Дана функция f, определённая на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения. Известно, что для любых x и y таких, что $x > y$, верно неравенство $(f(x))^2 \leqslant f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в промежутке $[0; 1]$.

18. (*Всеросс., 2015, РЭ, 11*) По кругу расставлено 300 положительных чисел. Могло ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме одного, равно разности своих соседей?

Нет

19. (*ММО, 2016, 11*) За некоторое время мальчик проехал на велосипеде целое число раз по периметру квадратной школы в одном направлении с постоянной по величине скоростью 10 км/ч. В это же время по периметру школы прогуливался его папа со скоростью 5 км/ч, при этом он мог менять направление движения. Папа видел мальчика в те и только те моменты, когда они находились на одной стороне школы. Мог ли папа видеть мальчика больше половины указанного времени?

Нет