Основная теорема арифметики

Пусть дано число 360. На какое наименьшее простое число оно делится? Очевидно, на 2: $360 = 2 \cdot 180$. На какое наименьшее простое число делится 180? Тоже на 2: $180 = 2 \cdot 90$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 90$. На какое наименьшее простое число делится 90? Опять на 2: $90 = 2 \cdot 45$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45$. На какое наименьшее простое число делится 45? На 3: $45 = 3 \cdot 15$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15$. Наконец, $15 = 3 \cdot 5$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, и на этом начатый нами процесс останавливается: все получившиеся множители являются простыми.

Точно такую же процедуру можно проделать и для любого другого числа. Это утверждение есть знаменитая *основная теорема арифметики*.

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число (кроме единицы) можно представить в виде произведения простых множителей, и притом единственным образом (с точностью до порядка сомножителей).

Такое произведение называется *разложением на простые множители* или *каноническим разложением*. Выше было получено каноническое разложение числа 360:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

или, как это обычно записывают,

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Мы видим, таким образом, что любое число состоит как бы из «кирпичиков» — простых множителей, возникающих в его каноническом разложении. Простое число состоит из одного такого «кирпичика» — самого себя.

Каноническое разложение является мощным инструментом решения целого ряда задач. Благодаря ему перед нами открывается вся картина делителей данного числа. Так, для числа $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ мы теперь можем сразу сказать, что оно делится, например, на $2^3 = 8$, на $2^2 \cdot 3 = 12$, на $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ (так как эти числа «сконструированы» из отдельных элементов канонического разложения) и не делится, скажем, на 7 и на $33 = 3 \cdot 11$ (так как ни 7, ни 11 не входят в каноническое разложение).

Задачи

1. Найдите каноническое разложение числа 3150. Покажите, что оно делится на 6, 14, 18, 21, 35, 42, 45. Делится ли оно на 12, 22, 26, 27?

2. Не вычисляя произведения $2013 \cdot 15 \cdot 77$, выясните, делится ли оно на 2, 3, 9, 35, 55, 80, 6039.

3. Число A делится на 3 и 4. Следует ли отсюда, что A делится на $3 \cdot 4 = 12$?

4. Число A делится на 4 и 6. Следует ли отсюда, что A делится на $4 \cdot 6 = 24$?

5. Число $3A$ делится на 7. Следует ли отсюда, что A делится на 7?

6. Число $9A$ делится на 6. Следует ли отсюда, что A делится на 6?

7. Докажите, что произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

8. Докажите, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

9. Допишите к числу 523... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9. Сколько всего таких чисел существует?

Существует два таких числа

10. На сколько нулей оканчивается число 100! ?

На 24

11. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 6.1*) В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем ко- личество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

11

12. (*Математический праздник, 1999, 6.2*) Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

13. (*Математический праздник, 2007, 6–7.2*) В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

Тройка

14. (*Московская устная олимпиада, 2016, 6.2*) Есть четыре карточки с цифрами: 2, 0, 1, 6. Для каждого из чисел от 1 до 9 можно из этих карточек составить четырёхзначное число, которое кратно выбранному однозначному. А в каком году такое будет в следующий раз?

15. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.2*) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

16. (*Математический праздник, 1995, 7.1*) Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

57

17. (*Математический праздник, 2008, 7.1*) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

251

18. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.1*) Юра записал четырёхзначное число. Лёня прибавил к первой цифре этого числа 1, ко второй 2, к третьей 3 и к четвёртой 4, а потом перемножил полученные суммы. У Лёни получилось 234. Какое число могло быть записано Юрой?

2009 или 1109

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.4*) Коробка с сахаром имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В ней находится 280 кусочков сахара, каждый из которых — кубик размером $1 \times 1 \times 1$ см. Найдите площадь полной поверхности коробки, если известно, что длина каждой из её сторон меньше 10 см.

262

20. (*Всеросс., 2018, МЭ, 7.4*) На клетчатой бумаге нарисовали большой квадрат. Его разрезали на несколько одинаковых средних квадратов. Один из средних квадратов разрезали на несколько одинаковых маленьких квадратов. Стороны всех квадратов проходят по линиям сетки. Найдите длины сторон большого, среднего и маленького квадратов, если сумма их площадей равна 154.

12, 3 и 1

21. (*«Высшая проба», 2017, 7.3, 8.1*) Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3.

22. (*Математический праздник, 2009, 7.6*) Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег.

Наилучший результат — 23 рубля

23. (*Математический праздник, 1996, 7.6*) Произведение последовательных чисел от 1 до n называется n-факториал и обозначается $n!$ ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$). Можно ли вычеркнуть из произведения

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$$

один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

Да

24. (*«Ломоносов», 2017, 7–8.6, 9.4*) Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m + n$.