

## Окружность девяти точек и прямая Эйлера

В треугольнике  $ABC$  обозначим:

$M_A, M_B, M_C$  — середины сторон  $BC, AC, AB$  соответственно;

$AH_A, BH_B, CH_C$  — высоты,  $H$  — ортоцентр;

$T_A, T_B, T_C$  — середины отрезков  $AH, BH, CH$  соответственно;

**ТЕОРЕМА.** (*Окружность девяти точек*) Точки  $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, T_A, T_B, T_C$  лежат на одной окружности.

### Первое доказательство теоремы

ЗАДАЧА 1. Докажите, что  $\triangle M_A M_B M_C = \triangle T_A T_B T_C$ .

ЗАДАЧА 2. Докажите, что  $M_A M_B T_A T_B, M_B M_C T_B T_C$  и  $M_C M_A T_C T_A$  — прямоугольники.

ЗАДАЧА 3. Докажите, что точки  $M_A, M_B, M_C, T_A, T_B, T_C$  лежат на одной окружности.

ЗАДАЧА 4. Докажите ТЕОРЕМУ.

ЗАДАЧА 5. («Высшая проба», 2013, 9) В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ . На стороне  $AB$  выбрана точка  $P$  так, что окружность, описанная вокруг треугольника  $PA_1B_1$ , касается стороны  $AB$ . Найдите  $PC_1$ , если  $PA = 30$  и  $PB = 10$ .

9

### Второе доказательство теоремы (лемма о трезубце)

Рассмотрим остроугольный треугольник  $ABC$  и окружность  $\omega$ , описанную вокруг его орторегулярного треугольника.

ЗАДАЧА 6. С помощью леммы о трезубце докажите, что точки  $T_A, T_B, T_C$  расположены на окружности  $\omega$ .

ЗАДАЧА 7. С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что точки  $M_A, M_B, M_C$  расположены на окружности  $\omega$ .

ЗАДАЧА 8. Проведите аналогичные рассуждения для тупоугольного треугольника  $ABC$ .

### Прямая Эйлера

ЗАДАЧА 9. Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что

$$AH = 2 \cdot OM_A, \quad BH = 2 \cdot OM_B, \quad CH = 2 \cdot OM_C.$$

*Указание.* Рассмотрите треугольник, для которого  $\triangle ABC$  является *серединным*.

ЗАДАЧА 10. Пусть  $X$  — точка пересечения  $AM_A$  и  $OH$ . Покажите, что  $X$  совпадает с центроидом (точкой пересечения медиан) треугольника  $ABC$ .

Таким образом, ортоцентр, центр описанной окружности и центроид треугольника лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Эйлера*.

ЗАДАЧА 11. Покажите, что центр окружности девяти точек является серединой отрезка  $ОН$ .

Теперь нетрудно заключить, что окружность девяти точек данного треугольника переходит в описанную окружность этого треугольника:

- при гомотетии относительно центроида с коэффициентом  $-2$ ;
- при гомотетии относительно ортоцентра коэффициентом  $2$ .

Эти факты полезно иметь в виду при решении задач.

ЗАДАЧА 12. (*Всеросс., 2015, финал, 9*) Остроугольный треугольник  $ABC$  ( $AB < AC$ ) вписан в окружность  $\Omega$ . Пусть  $M$  — точка пересечения его медиан, а  $AH$  — высота этого треугольника. Луч  $MH$  пересекает  $\Omega$  в точке  $A'$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $A'HB$ , касается  $AB$ .