Числовые таблицы

1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.3*) Можно ли в некоторые клетки таблицы 8×8 написать единицы, а в остальные — нули, так, чтобы во всех столбцах была разная сумма, а во всех строчках — одинаковая?

2. (*Всеросс., 2016, МЭ, 8*) В каждой клетке таблицы размером 13×13 записано одно из натуральных чисел от 1 до 25. Клетку назовём «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?

3. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.2*) Вася вписал в клетки таблицы 4×18 натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Затем для каждого из восемнадцати столбцов он перемножил стоящие в нём четыре числа и вычислил сумму цифр полученного произведения. Могли ли все восемнадцать сумм оказаться одинаковыми?

4. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Дана квадратная таблица. В каждой её клетке стоит либо плюс, либо минус, причём всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов.

5. (*Олимпиада им. Эйлера, 2016, РЭ*) В каждой клетке таблицы 100×100 записано одно из чисел 1 или -1. Могло ли оказаться, что ровно в 99 строках суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 столбцах — положительны?

6. (*ММО, 2012, 8*) В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа — нули. При каких числах m и n, больших 100, такое возможно?

7. (*ММО, 2011, 8*) В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

8. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

б) В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

б) (*10–11*) В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

9. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) В каждую клетку квадрата 1000×1000 вписано число так, что в любом не выходящем за пределы квадрата прямоугольнике площади s со сторонами, проходящими по границам клеток, сумма чисел одна и та же. При каких s числа во всех клетках обязательно будут одинаковы?

10. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11*) Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

11. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 10*) В каждой клетке квадратной таблицы размером $n \times n$ клеток ($n \geqslant 3$) записано число 1 или -1. Если взять любые две строки, перемножить числа, стоящие в них друг над другом и сложить n получившихся произведений, то сумма будет равна 0. Докажите, что число n делится на 4.

12. (*ММО, 2015, 11*) Докажите, что в таблице 8×8 нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата 2×2 вида

a	b
c	d

было выполнено равенство $|ad - bc| = 1$.

13. (*«Высшая проба», 2016, 10*) Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например, $f(1) = 10$, $f(11) = 0$.

а) Что больше: $f(9)$ или $f(10)$?

б) Что больше: $f(5)$ или $f(6)$?

14. (*«Высшая проба», 2016, 11*) Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например, $f(1) = 2016$, $f(2017) = 0$.

а) Что больше: $f(2015)$ или $f(2016)$?

б) Что больше: $f(1008)$ или $f(1009)$?

15. (*ММО, 2017, 11.5*) Таблица размером 2017×2017 заполнена ненулевыми цифрами. Среди 4034 чисел, десятичные записи которых совпадают со строками и столбцами этой таблицы, читаемыми слева направо и сверху вниз соответственно, все, кроме одного, делятся на простое число p, а оставшееся число на p не делится. Найдите все возможные значения p.

16. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) а) Группа людей прошла опрос, состоящий из 20 вопросов, на каждый из которых возможно два ответа. После опроса оказалось, что для любых 10 вопросов и любой комбинации ответов на эти вопросы существует человек, давший именно эти ответы на эти вопросы. Обязательно ли найдутся два человека, у которых ответы ни на один вопрос не совпали?

б) Решите ту же задачу, если на каждый вопрос есть 12 вариантов ответа.