

Числовые таблицы

1. (*Всеросс., 2016, МЭ, 8*) В каждой клетке таблицы размером 13×13 записано одно из натуральных чисел от 1 до 25. Клетку назовём «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?
2. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.2*) Вася вписал в клетки таблицы 4×18 натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Затем для каждого из восемнадцати столбцов он перемножил стоящие в нём четыре числа и вычислил сумму цифр полученного произведения. Могли ли все восемнадцать сумм оказаться одинаковыми?
3. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Дана квадратная таблица. В каждой её клетке стоит либо плюс, либо минус, причём всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов.
4. (*Олимпиада им. Эйлера, 2016, регион*) В каждой клетке таблицы 100×100 записано одно из чисел 1 или -1 . Могло ли оказаться, что ровно в 99 строках суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 столбцах — положительны?
5. (*ММО, 2012, 8*) В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа — нули. При каких числах m и n , больших 100, такое возможно?
6. (*ММО, 2011, 8*) В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a , а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b . Докажите, что $a = b$.
7. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.
б) В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?
- б) (*10–11*) В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?
8. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) В каждую клетку квадрата 1000×1000 вписано число так, что в любом не выходящем за пределы квадрата прямоугольнике площади s со сторонами, проходящими по границам клеток, сумма чисел одна и та же. При каких s числа во всех клетках обязательно будут одинаковы?

9. (Всеросс., 2014, регион, 11) Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2 . Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a . Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

10. (Всеросс., 1996, округ, 10) В каждой клетке квадратной таблицы размером $n \times n$ клеток ($n \geq 3$) записано число 1 или -1 . Если взять любые две строки, перемножить числа, стоящие в них друг над другом и сложить n получившихся произведений, то сумма будет равна 0. Докажите, что число n делится на 4.

11. (ММО, 2015, 11) Докажите, что в таблице 8×8 нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата 2×2 вида

a	b
c	d

было выполнено равенство $|ad - bc| = 1$.

12. («Высшая проба», 2016, 10) Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например, $f(1) = 10$, $f(11) = 0$.

- а) Что больше: $f(9)$ или $f(10)$?
- б) Что больше: $f(5)$ или $f(6)$?

13. («Высшая проба», 2016, 11) Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например, $f(1) = 2016$, $f(2017) = 0$.

- а) Что больше: $f(2015)$ или $f(2016)$?
- б) Что больше: $f(1008)$ или $f(1009)$?

14. (ММО, 2017, 11.5) Таблица размером 2017×2017 заполнена ненулевыми цифрами. Среди 4034 чисел, десятичные записи которых совпадают со строками и столбцами этой таблицы, читаемыми слева направо и сверху вниз соответственно, все, кроме одного, делятся на простое число p , а оставшееся число на p не делится. Найдите все возможные значения p .

15. (Турнир городов, 2017, 8–9) а) Группа людей прошла опрос, состоящий из 20 вопросов, на каждый из которых возможно два ответа. После опроса оказалось, что для любых 10 вопросов и любой комбинации ответов на эти вопросы существует человек, давший именно эти ответы на эти вопросы. Обязательно ли найдутся два человека, у которых ответы ни на один вопрос не совпали?

- б) Решите ту же задачу, если на каждый вопрос есть 12 вариантов ответа.