НОД и НОК

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике . . . 1
2 Московская математическая олимпиада . . . 4
3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера . . . 4
4 Турнир городов . . . 5
5 «Покори Воробьёвы горы!» . . . 5
6 «Ломоносов» . . . 5
7 «Высшая проба» . . . 6
8 «Физтех» . . . 6
9 Свойство Лукача . . . 6

Понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного содержатся в листке «НОД и НОК» для 5–7 классов.

0.1. Пусть a и b — фиксированные целые числа. Рассмотрим множество S чисел вида $ax + by$ со всевозможными целыми x и y. Докажите, что:

а) $a, b \in S$;

б) если $m \in S$ и $n \in S$, то $m \pm n \in S$;

в) если $k \in \mathbb{Z}$ и $m \in S$, то $km \in S$;

г) если $m, n \in S$ и $n > 0$, то остаток от деления m на n принадлежит S;

д) если c — общий делитель чисел a и b, то все числа из S делятся на c;

е) если d — наименьшее положительное число в S, то все числа из S делятся на d.

0.2. Докажите, что число d из предыдущей задачи есть наибольший общий делитель чисел a и b.

0.3. Что представляет собой множество S из задачи 0.1, если числа a и b взаимно просты?

$\boxed{S = \mathbb{Z}}$

0.4. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a, a - b)$ для любых целых a и b.

0.5. Докажите, что при любом натуральном n числа $21n + 4$ и $14n + 3$ взаимно простые.

0.6. Для любых натуральных a, x, y докажите, что НОК$(ax, ay) = a \cdot$ НОК(x, y).

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. [Vse — 2016.S.8.1] Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Сегодня, 13 сентября, у Робинзона тяжёлый день: он должен делать все эти три дела. Когда у Робинзона будет следующий тяжёлый день?

13 октября

1.2. [Vse — 2003.R.8.6] Для некоторых натуральных чисел a, b, c и d выполняются равенства

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}\,.$$

Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

1.3. [Vse — 2014.R.9.3] Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

1.4. [Vse — 2016.R.9.3] Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

1.5. [Vse — 1996.R.9.3] Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

1.6. [Vse — 2009.F.9.1] Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

1.7. [Vse — 2016.R.10.2] Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

1.8. [Vse — 2004.R.9.4;10.3] Три натуральных числа таковы, что произведение каждых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что эти три числа имеют общий делитель, больший единицы.

1.9. [Vse — 1995.R.10.2] Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m,n)+\text{НОД}(m,n) = m+n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

1.10. [Vse — 2013.R.10.6] Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ — составное.

1.11. [Vse — 1994.F.10.5] Докажите, что для натуральных чисел k, m и n справедливо неравенство

$$[k,m]\cdot[m,n]\cdot[n,k] \geqslant [k,m,n]^2$$

(здесь через $[x,y,\ldots]$ обозначено наименьшее общее кратное чисел x, y, $\ldots$).

1.12. [Vse — 2006.F.9.5;10.5] Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_{10} — натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k, меньший a_k. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

1.13. [Vse — 2000.F.9.2] Таня задумала натуральное число $X \leqslant 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N, меньших 100, и задаёт вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X+M$ и N?» Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав семь таких вопросов.

1.14. [Vse — 2016.F.9.3] Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s-1$ чисел оказалась равной $N-2$. Какие значения могло принимать N?

1.15. [Vse — 2013.F.9.3] На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_{100}. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди b_1, b_2, ..., b_{100}?

1.16. [Vse — 2015.F.10.5] Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.

1.17. [Vse — 2014.R.10.7] По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

1.18. [Vse — 1996.F.10.5] В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?

1.19. [Vse — 1995.F.10.5] Последовательность натуральных чисел a_i такова, что $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$ для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

1.20. [Vse — 2003.R.9.7] Докажите, что из любых шести четырёхзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности.

1.21. [Vse — 2003.R.10.7] Докажите, что из произвольного множества трёхзначных чисел, включающего не менее четырёх чисел, взаимно простых в совокупности, можно выбрать четыре числа, также взаимно простых в совокупности.

1.22. [Vse — 2010.R.11.4] Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) квадратной, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число. (Тройка (c, b, a) новой тройкой не считается.)

1.23. [Vse — 2006.F.10.2] Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трёх чисел делится на 4.

1.24. [Vse — 1997.F.10.7] Найдите все такие тройки натуральных чисел m, n и l, что

$$m + n = (\text{НОД}(m, n))^2, \quad m + l = (\text{НОД}(m, l))^2, \quad n + l = (\text{НОД}(n, l))^2.$$

1.25. [Vse — 2000.F.9.8] По окружности расставлено 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми.

1.26. [Vse — 2005.F.11.4] Натуральные числа x, y, z ($x > 2$, $y > 1$) таковы, что $x^y + 1 = z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x, через q — количество различных простых делителей числа y. Докажите, что $p \geqslant q + 2$.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. [Mos — 2000.11.1] Наибольший общий делитель натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД$(m + 2000n, n + 2000m)$?

2.2. [Mos — 1999.10.3] Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что числа x^3+y и y^3+x делятся на $x^2 + y^2$.

2.3. [Mos — 2005.9.5] На окружности расставлено n цифр, отличных от 0. Сеня и Женя переписали себе в тетрадки $n - 1$ цифру, читая их по часовой стрелке. Оказалось, что хотя они начали с разных мест, записанные ими $(n - 1)$-значные числа совпали. Докажите, что окружность можно разрезать на несколько дуг так, чтобы записанные на дугах цифры образовывали одинаковые числа.

2.4. [Mos — 2014.9.5] *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

2.5. [Mos — 2018.9.5;10.4] Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n, m существует *хорошая* расстановка?

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2009.F.5] Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*, *, *) - \text{НОК}(*, *, *) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

3.2. [Eul — 2014.R.3] Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?

3.3. [Eul — 2016.R.4] Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2015, 8–11*) Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) ровно в шесть раз;

б) ровно в пять раз?

а) Да; б) нет

4.2. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы каждые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

$3 \cdot 2^{1009}$

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–9*) Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N+2$ делится (без остатка) на 2, $N+3$ — на 3, $\ldots$, $N+10$ — на 10.

2520

5.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11*) Пусть $\frac{m}{n}$ — положительная несократимая дробь, и известно, что дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сократима?

На 7

6 «Ломоносов»

6.1. (*«Ломоносов», 2014, 8–9*) Найдите все пары натуральных m, n, таких, что НОД$(m,n) =$ $= 2015!$, а НОК$(m,n) = 2016!$. (Пары (m,n) и (n,m) считаются как одна пара.)

Тройки $(1, 2^5\cdot 3^2\cdot 7)$, $(2^5, 3^2\cdot 7)$, $(3^2, 2^5\cdot 7)$, $(7, 2^5\cdot 3^2)$, умноженные на 2015!

6.2. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Среди чисел, превышающих 2013, найдите наименьшее нечётное число N, при котором дробь $\frac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

2129

6.3. (*«Ломоносов», 2007*) Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК$(a,b) = 60$ и НОК$(a,c) =$ $= 270$. Найдите НОК(b,c).

108 или 540

6.4. (*«Ломоносов», 2009*) Какие значения может принимать наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

2 или 6

7 «Высшая проба»

7.1. (*«Высшая проба», 2016, 10–11*) Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады «Высшая проба» по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c и вычислил $x = =$ НОД(a, b), $y =$ НОД(b, c), $z =$ НОД(c, a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

(8, 14, 18)

8 «Физтех»

8.1. (*«Физтех», 2015, 8–9*) На доске написаны числа $2^{17}3^{2}5^{12}7^{3}$ и $2^{2}3^{22}5^{2}7^{15}$. За одну операцию разрешается написать на доску ещё одно натуральное число — разность каких-то двух написанных на доске. При этом запрещается записывать такие числа, которые уже есть на доске. Найдите сумму двух наименьших чисел, которые могут получиться на доске в результате применения таких операций.

926100

8.2. (*«Физтех», 2014, 7–10*) Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел $11n + 6$ и $23n + 5$, если n — натуральное число?

83

8.3. (*«Физтех», 2013, 8, 11*) Натуральные числа m и n удовлетворяют условию НОД$(m, n) = 1$. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(20m + n, 30n + m)$?

599

9 Свойство Лукача

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ (для технических целей положим также $a_0 = 0$). Будем говорить, что эта последовательность обладает *свойством Лукача*, если выполнено равенство $(a_m, a_n) = a_d$, где $d = (m, n)$ — наибольший общий делитель m и n.

9.1. Докажите, что если $(a_n, a_k) = (a_{n-k}, a_k)$ при $n > k$, то последовательность a_n обладает свойством Лукача.

9.2. Докажите, что последовательность $a_n = 2^n - 1$ обладает свойством Лукача.

9.3. [Sov — 1988.10.7] Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_0 = 0,\ a_n = P(a_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots,$$

где $P(x)$ — многочлен с натуральными коэффициентами. Докажите, что для любых натуральных чисел m и k с наибольшим общим делителем d наибольший общий делитель чисел a_m и a_k равен a_d.

9.4. *Числа Фибоначчи* задаются соотношениями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (при $n \geqslant 2$).

а) Докажите, что $F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1}$ при $n > k$.

б) Докажите, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты.

в) (*Теорема Лукача*) Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.