

# Неравенства с модулем

## Содержание

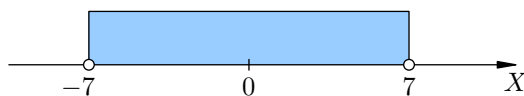
1	Геометрический смысл модуля . . . . .	1
2	Замена переменной . . . . .	2
3	Перебор промежутков . . . . .	3
4	Равносильные переходы . . . . .	4
5	Задачи . . . . .	8

Данная статья продолжает предыдущую статью «Уравнения с модулем». Мы рассматриваем в целом аналогичные ситуации, только вместо знака равенства будет стоять знак неравенства.

### 1 Геометрический смысл модуля

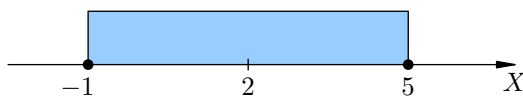
Понятие модуля обладает простым геометрическим смыслом: именно,  $|x|$  есть расстояние от точки  $x$  до нуля. Более общим образом,  $|x - a|$  есть расстояние от точки  $x$  до точки  $a$ . Давайте рассмотрим несколько элементарных примеров.

1. Решениями неравенства  $|x| < 7$  служат все те  $x$ , которые удалены от нуля на расстояние, меньшее 7. Они расположены на интервале  $(-7; 7)$ .



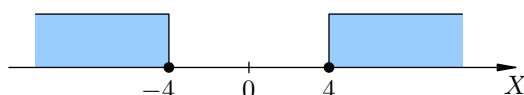
Множество решений неравенства  $|x| < 7$

2. Решения неравенства  $|x - 2| \leq 3$  суть все те  $x$ , которые удалены от точки 2 на расстояние, не превосходящее 3; они заполняют отрезок  $[-1; 5]$ .



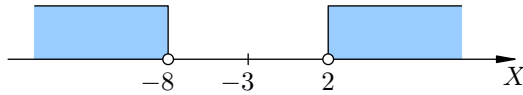
Множество решений неравенства  $|x - 2| \leq 3$

3. Решениями неравенства  $|x| \geq 4$  являются все  $x$ , удалённые от нуля на расстояние, не меньшее 4. Это объединение двух непересекающихся лучей:  $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ .



Множество решений неравенства  $|x| \geq 4$

4. Решениями неравенства  $|x + 3| > 5$  являются все те  $x$ , которые удалены от точки  $-3$  на расстояние, большее 5. Это объединение двух непересекающихся лучей с выколотыми началами:  $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$ .



Множество решений неравенства  $|x + 3| > 5$

ЗАДАЧА 1. (МГУ, геологич. ф-т, 2001) Решить неравенство

$$\frac{|x - 3| + 2}{|2x - 3| - 5} \leq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Числитель дроби положителен при всех  $x$ , поэтому данное неравенство равносильно отрицательности знаменателя:

$$|2x - 3| - 5 < 0 \Leftrightarrow |2x - 3| < 5.$$

Дальше понятно: величина  $2x$  удалена от точки 3 на расстояние, меньшее 5:

$$-2 < 2x < 8,$$

откуда  $-1 < x < 4$ .

ОТВЕТ:  $(-1; 4)$ .

## 2 Замена переменной

В некоторых неравенствах оказывается полезной замена  $|x - a| = t$ .

ЗАДАЧА 2. (МГУ, физический ф-т, 2004) Решить неравенство

$$\frac{|x - 2|}{\frac{12}{|x-2|} - 1} > 1.$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену  $|x - 2| = t$ :

$$\frac{t}{\frac{12}{t} - 1} > 1.$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{t^2}{12 - t} > 1,$$

(поскольку запрещённое значение  $t = 0$  не является решением последнего), которое, в свою очередь, равносильно

$$\frac{t^2 + t - 12}{t - 12} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t + 4)(t - 3)}{t - 12} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -4, \\ 3 < t < 12, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x - 2| < -4, \\ 3 < |x - 2| < 12. \end{cases}$$

Первое неравенство полученной совокупности не имеет решений. Решениями второго неравенства служат значения  $x$ , удалённые от точки  $x = 2$  на расстояние больше 3, но меньше 12, то есть  $-10 < x < -1$  и  $5 < x < 14$ .

ОТВЕТ:  $(-10; -1) \cup (5; 14)$ .

ЗАДАЧА 3. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003) Решить неравенство

$$\frac{3|y|}{4} - y^2 \leq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену  $|y| = t$ :

$$\frac{3t}{4} - t^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \left( t - \frac{3}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0, \\ t \geq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |y| \leq 0, \\ |y| \geq \frac{3}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ y \geq \frac{3}{4}, \\ y \leq -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

ОТВЕТ:  $(-\infty; -\frac{3}{4}] \cup \{0\} \cup [\frac{3}{4}; +\infty)$ .

### 3 Перебор промежутков

В некоторых неравенствах модуль снимается «в лоб» — путём рассмотрения значений переменной на различных промежутках.

ЗАДАЧА 4. (МГУ, экономич. ф-т, 1984) Решить неравенство

$$2|x - 4| + |3x + 5| \geq 16.$$

РЕШЕНИЕ. Разбираем три случая расположения  $x$  относительно точек  $-\frac{5}{3}$  и 4.

1)  $x \geq 4$ . Имеем:

$$\begin{aligned} 2(x - 4) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq \frac{19}{5}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых  $x \geq 4$ . Иными словами, все числа из промежутка  $[4; +\infty)$  являются решениями нашего неравенства.

2)  $-\frac{5}{3} \leq x \leq 4$ . Имеем в данном случае:

$$\begin{aligned} 2(4 - x) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество  $[3; 4]$ .

3)  $x \leq -\frac{5}{3}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} 2(4 - x) - 3x - 5 &\geq 16, \\ x &\leq -\frac{13}{5}. \end{aligned}$$

Так как  $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$ , то все значения  $x$  из полученного промежутка  $(-\infty, -\frac{13}{5}]$  служат решениями исходного неравенства.

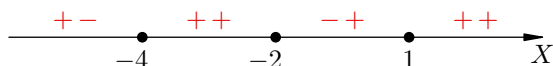
Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

ОТВЕТ:  $(-\infty, -\frac{13}{5}] \cup [3; +\infty)$ .

ЗАДАЧА 5. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) Решить неравенство

$$|x^2 + x - 2| + |x + 4| \leq x^2 + 2x + 6.$$

РЕШЕНИЕ. Выражение  $x^2 + x - 2$  положительно при  $x < -2$ ,  $x > 1$  и отрицательно при  $-2 < x < 1$ . Выражение  $x + 4$  положительно при  $x > -4$  и отрицательно при  $x < -4$ . Расставим знаки наших выражений на числовой оси (первым идёт знак квадратного трёхчлена, вторым — знак линейной функции):



Теперь понятно, что нам нужно рассмотреть *три* случая.

1)  $x \leq -4$ . При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся со знаком плюс, линейная функция — с минусом:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 - x - 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ x &\geq -6. \end{aligned}$$

Таким образом, здесь имеем решения  $-6 \leq x \leq -4$ .

2)  $-4 \leq x \leq -2$  или  $x \geq 1$ . При снятии модулей оба выражения остаются с плюсом:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 + x + 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ 2 &\leq 6. \end{aligned}$$

Получилось верное числовое равенство. Значит, рассматриваемые значения  $-4 \leq x \leq -2$  и  $x \geq 1$  являются решениями нашего неравенства.

3)  $-2 \leq x \leq 1$ . При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся с минусом, линейная функция — с плюсом:

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2 + x + 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ x^2 + x &\geq 0. \end{aligned}$$

Полученное неравенство имеет решения  $x \leq -1$  или  $x \geq 0$ . В пересечении с рассматриваемым промежутком имеем множество решений исходного неравенства:  $-2 \leq x \leq -1$  или  $0 \leq x \leq 1$ .

Объединяя множества решений в трёх рассмотренных случаях, получаем ответ.

ОТВЕТ:  $[-6; -1] \cup [0; +\infty)$ .

## 4 Равносильные переходы

«Лобовое» снятие модуля (путём перебора промежутков) не всегда является самым эффективным средством. В некоторых неравенствах бывает проще переходить к равносильным системам или совокупностям условий.

## Умножение на модуль

Как известно, неравенство можно умножить на положительную величину (с сохранением знака неравенства). В частности, имеет место эквивалентность

$$\frac{A}{|B|} < C \Leftrightarrow \begin{cases} A < |B|C, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

( $A, B, C$  — некоторые выражения, знак неравенства может быть любым). Такой переход может сократить вычислительную работу.

ЗАДАЧА 6. (МГУ, ВМК, 1998) Решить неравенство

$$3x < \frac{4x - 2}{|x - 3|}.$$

РЕШЕНИЕ. Непосредственное снятие модуля приводит к двум рациональным неравенствам, но лучше сразу умножить на  $|x - 3|$ . Наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x|x - 3| < 4x - 2, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x > 3, \\ 3x(x - 3) < 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ 3x^2 - 13x + 2 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} x < 3, \\ 3x(3 - x) < 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 3x^2 - 5x - 2 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решения системы (1) образуют множество  $3 < x < \frac{13 + \sqrt{145}}{6}$ . Решения системы (2) суть два промежутка  $x < -\frac{1}{3}$  и  $2 < x < 3$ .

ОТВЕТ:  $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; 3) \cup (3; \frac{13 + \sqrt{145}}{6})$ .

Задача простая, и выигрыш от умножения на модуль здесь не так уж велик. Однако в следующей задаче равносильное умножение неравенства позволит очень существенно сэкономить на выкладках.

ЗАДАЧА 7. (МГУ, мех.мат, 2000) Решить неравенство

$$\frac{|x - 5| - |x + 4|}{|x - 2| - |x + 1|} < \frac{|x - 2| + |x + 1|}{|x + 4|}. \quad (3)$$

РЕШЕНИЕ. Непосредственное снятие модулей означает перебор пяти промежутков, что не вызывает энтузиазма. Поэтому действуем иначе: при ограничении  $x \neq -4$  умножаем обе части неравенства (3) на положительную величину  $\frac{|x+4|}{|x-2|+|x+1|}$  и получаем равносильное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|(x - 5)(x + 4)| - (x + 4)^2}{(x - 2)^2 - (x + 1)^2} < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 8x - 16}{-6x + 3} < 1 &\Leftrightarrow \frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 2x - 19}{2x - 1} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть  $x \in E_1 = (-\infty; -4) \cup [5; +\infty)$ . Тогда  $x^2 - x - 20 \geq 0$ , и неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{-3x - 39}{2x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 13}{2x - 1} < 0 \Leftrightarrow -13 < x < \frac{1}{2},$$

что в пересечении с множеством  $E_1$  даёт часть решений исходного неравенства (3):

$$\boxed{-13 < x < -4.} \quad (5)$$

Пусть теперь  $x \in E_2 = (-4; 5)$ . Тогда  $x^2 - x - 20 < 0$ , и неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{-2x^2 - x + 1}{2x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)(2x - 1)}{2x - 1} < 0,$$

решения которого суть  $x < -1$ . В пересечении с множеством  $E_2$  получаем вторую часть решений исходного неравенства:

$$\boxed{-4 < x < -1.} \quad (6)$$

Множество решений неравенства (3) есть объединение «рамочек» (5) и (6).

ОТВЕТ:  $(-13; -4) \cup (-4; -1)$ .

### Неравенства вида $|A| < B$

Пусть  $A$  и  $B$  — некоторые выражения с переменной. Оказывается, неравенство

$$|A| < B \quad (7)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \quad (8)$$

Действительно, если  $B > 0$ , то эквивалентность (7)  $\Leftrightarrow$  (8) очевидна. В случае  $B \leq 0$  неравенство (7) не имеет решений; но и система (8) также не имеет решений, поскольку выражение  $A$  не может быть одновременно меньше неположительной величины  $B$  и больше неотрицательной величины  $-B$ . Следовательно, и при  $B \leq 0$  имеем (7)  $\Leftrightarrow$  (8).

На экзамене или олимпиаде вам придётся привести эти рассуждения, доказывающие законность рассмотренного перехода

$$|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \quad (9)$$

Но оно того стоит! Это наглядно демонстрирует следующий пример.

**Задача 8.** Решить неравенство

$$|x^2 - 3x + 1| < x - 2.$$

**РЕШЕНИЕ.** Ради интереса попробуйте снять модуль как раньше, исследуя знак квадратного трёхчлена. Во-первых, вы сразу получите иррациональные корни. Затем, после снятия модуля и упрощений, вас поджидают другие иррациональные корни, которые придётся сравнивать с первыми. Однако значительную часть этих технических проблем удаётся обойти, используя переход (9).

А именно, наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 < x - 2, \\ x^2 - 3x + 1 > 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ \begin{cases} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < 1 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Вот и всё. Теперь легко получаем ответ.

ОТВЕТ:  $(1 + \sqrt{2}; 3)$ .

Переход (9) сохраняет свой вид при замене строгого равенства на нестрогое:

$$|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B, \\ A \geq -B. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство эквивалентности (10) совершенно аналогично тому, что приведено выше.

### Неравенства вида $|A| > B$

Неравенство

$$|A| > B \quad (11)$$

равносильно совокупности

$$\begin{cases} A > B, \\ A < -B. \end{cases} \quad (12)$$

В самом деле, если  $B \geq 0$ , то эквивалентность (11)  $\Leftrightarrow$  (12) очевидна. Если же  $B < 0$ , то неравенство (11) выполнено при всех допустимых значениях  $x$ ; но и решением совокупности (12) служат все те же допустимые  $x$ , поскольку одно из неравенств совокупности заведомо выполнено (при  $A \geq 0$  выполнено  $A > B$ , а при  $A < 0$  выполнено  $A < -B$ ). Следовательно, и при  $B < 0$  имеет место эквивалентность (11)  $\Leftrightarrow$  (12).

Разумеется, эквивалентность сохраняется при замене строгого неравенства на нестрогое:

$$|A| \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B, \\ A \leq -B. \end{cases} \quad (13)$$

Задача 9. (МГУ, ВМК, 2000) Решить неравенство

$$||x^2 - 8x + 2| - x^2| \geq 2x + 2.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь используются оба эквивалентных перехода (13) и (10). Имеем:

$$\begin{aligned} ||x^2 - 8x + 2| - x^2| \geq 2x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 8x + 2| - x^2 \geq 2x + 2, \\ |x^2 - 8x + 2| - x^2 \leq -2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 8x + 2| \geq x^2 + 2x + 2, \\ |x^2 - 8x + 2| \leq x^2 - 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 2 \geq x^2 + 2x + 2, \\ x^2 - 8x + 2 \leq -x^2 - 2x - 2, \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 2 \leq x^2 - 2x - 2, \\ x^2 - 8x + 2 \geq -x^2 + 2x + 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x^2 - 5x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 1 \leq x \leq 2, \\ x \geq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

ОТВЕТ:  $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$ .

## Неравенства вида $|A| < |B|$

Решая неравенство вида  $|A| < |B|$  (знак неравенства тут может быть любым), удобно действовать следующим образом: коль скоро обе части неравенства неотрицательны, можно возвести неравенство в квадрат:

$$|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0.$$

Последнее неравенство решается, например, методом интервалов.

ЗАДАЧА 10. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) Решить неравенство

$$|x^2 + 10x + 16| \geq |x^2 - 16|.$$

РЕШЕНИЕ. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 + 10x + 16)^2 \geq (x^2 - 16)^2 \Leftrightarrow (10x + 32)(2x^2 + 10x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{16}{5}\right)x(x + 5) \geq 0.$$

Дальнейшее элементарно.

ОТВЕТ:  $[-5; -\frac{16}{5}] \cup [0; +\infty)$ .

## 5 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить неравенство.

### Геометрический смысл модуля

1. а)  $|x - 6| \leq 4$ ;    б)  $|2x + 3| > 11$ .

$$(\infty+; 4] \cap [2; -\infty-)$$

2. (МГУ, физический ф-т, 1996)  $-1 < |x^2 - 7| < 29$ .

$$(9; 9-)$$

3. (МГУ, ИСАА, 2007)  $|x + 3| \cdot (|x - 1| - 3) \leq 0$ .

$$[7; 2-] \cup \{8\}$$

4. (МГУ, МШЭ, 2007)

$$\left|\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right| \geq \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right|.$$

$$[2]$$

### Замена переменной

5. (МГУ, географич. ф-т, 1997)

$$\frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2.$$

$$\left(\frac{1}{11}; \frac{1}{8}\right)$$



6. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998)

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{1}{|x+1|-2}.$$

$$(\{1;0\} \cap (\overline{2} - ; \overline{3} -))$$

7. (МГУ, физический ф-т, 2004)

$$\frac{|x-1|}{1 - \frac{6}{|x-1|}} < -1.$$

$$(\overline{2} ; \overline{3}) \cap (\{1 - ; \overline{3} -))$$

8. (МГУ, ФНМ, 2004)

$$|3x+1|+2 + \frac{3}{|3x+1|-2} \leq \frac{1}{|3x+1|+2}.$$

$$\left( \left[ \frac{\overline{3}}{1} ; \frac{\overline{3}}{\overline{2}-\overline{3}^{\wedge}} \right] \cap \left\{ \frac{\overline{3}}{1} - \right\} \right) \cap \left[ \frac{\overline{3}}{\overline{3}^{\wedge}} - ; 1 - \right)$$

9. (МГУ, географич. ф-т, 1987)  $x^2 + 2|x| < 8.$

$$(\overline{2} ; \overline{2} -)$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003)

$$\frac{3x^2}{2} - |x| \geq 0.$$

$$(\infty + ; \frac{\overline{3}}{\overline{2}}] \cap \{0\} \cap [\frac{\overline{3}}{\overline{2}} - ; \infty -)$$

11. а)  $x^2 + 2x - |x+1| > 5;$  б)  $x^2 - 4x + 8 - 5|x-2| \leq 0.$

$$[\overline{9} ; \overline{3}] \cap [1 ; \overline{2} -] \cap (\overline{9} ; (\infty + ; \overline{2}) \cap (\overline{4} - ; \infty -)) \cap (\overline{9}$$

### Перебор промежутков

12. (МГУ, геологич. ф-т, 2005)  $(|x|-1)(2x^2+x-1) \leq 0.$

$$[1 ; \frac{\overline{3}}{1}] \cap \{1 - \}$$

13. (МГУ, геологич. ф-т, 2006)

$$\frac{x^2-9}{|x|-3} \cdot (x+4) \geq 0.$$

$$[-\overline{4} - ; \overline{3} + \infty] \cap (\overline{3} ; \overline{3} -) \cap (\overline{3} - ; \overline{4} -)$$

14. (МГУ, ИСАА, 1998)

$$\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}.$$

$$(\infty + ; \overline{6}) \cap (\overline{3} ; \overline{2}) \cap (\overline{2} ; \overline{2} -)$$

15. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x|x|+1}{x-2} + 1 \geq x.$$

$$(\infty+; 2) \cap \left[\frac{5}{4}; \infty-\right)$$

16. (МГУ, геологич. ф-т, 2004)

$$\frac{x-2}{|x-2|} \leq 4-x^2.$$

$$\left(\frac{2}{3}; \sqrt{2}\wedge-\right]$$

17. (МГУ, химический ф-т, 2007)

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

$$\{-2\} \cap \left(4-\frac{5}{2}\sqrt{2}\wedge-\right] \cap (9-\infty-)$$

18. (МГУ, ФНМ, 2003)

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3.$$

$$(\infty+; 3) \cap \left(1-\frac{2}{3}\right]$$

19. (МГУ, геологич. ф-т, 2003)

$$\frac{x-2}{|x+2|} + \frac{2x+5}{x+2} \leq 0.$$

$$\left[1-\frac{2}{3}-\right) \cap (2-\frac{1}{2}-)$$

20. (МГУ, мехмат, 1985)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1}.$$

$$(\infty+; 1) \cap (1; 1-) \cap [2-\infty-)$$

21. (МГУ, мехмат, 2004)

$$\frac{(x^2+x+1)^2 - 2|x^3+x^2+x| - 3x^2}{10x^2-17x-6} \geq 0.$$

$$(\infty+; 2) \cap \{1\} \cap \left[\frac{1}{2}\wedge+\frac{01}{3}-\right) \cap \left[\frac{1}{2}\wedge-\frac{2}{3}-\infty-\right)$$

22. (МГУ, социологич. ф-т, 1999)

$$\frac{2|2-x|}{2-|x|} \leq |x-2|.$$

$$(\infty+; 2) \cap \{0\} \cap (2-\infty-)$$

23. (МГУ, экономич. ф-т, 1984)  $3|x - 2| + |5x - 4| \leq 10$ .

$$\left[\frac{2}{3}; 0\right]$$

24. (МГУ, ф-т гос. управления, 2003)  $|2x + 8| \geq 8 - |1 - x|$ .

$$(\infty + ; 1 - ] \cap [ 9 - ; \infty - )$$

25. (МГУ, ВМК, 2003)  $3|x + 2| - 4|x + 1| \geq 2$ .

$$\left[0; \frac{4}{8} - \right]$$

26. (МГУ, филологич. ф-т, 1991)

$$\frac{|x + 1| + |x - 2|}{x + 199} < 1.$$

$$(007 ; 99 - ) \cap (661 - ; \infty - )$$

27. (МГУ, геологич. ф-т, 1985)

$$\frac{|x - 2|}{|x - 1| - 1} \geq 1.$$

$$(\infty + ; 2) \cap (0 ; \infty - )$$

28. (МГУ, ИСАА, 1992)

$$\frac{|x + 3| - 1}{4 - 2|x + 4|} \geq -1.$$

$$(\infty + ; 2 - ) \cap (2 - ; 9 - ) \cap [ 8 - ; \infty - )$$

29. (МГУ, ф-т психологии, 1979)

$$\frac{3}{|x + 3| - 1} \geq |x + 2|.$$

$$\left[ \frac{9}{8} \wedge + 2 - ; 2 - \right) \cap (4 - ; 9 - ]$$

30. (МГУ, биологич. ф-т, 1998)  $|x^2 + 3x| + |x + 5| \leq x^2 + 4x + 9$ .

$$(\infty + ; 1 - ] \cap [ 2 - ; 2 - ]$$

31. («Покори Воробьёвы горы!», 2006)  $|x + 3| - |x^2 + x - 2| \geq 1$ .

$$[ 2 ; 0] \cap \{ 2 - \}$$

32. (МГУ, химический ф-т, 2000)  $|x + |1 - x|| > 3$ .

$$(\infty + ; 2)$$

33. (МГУ, геологич. ф-т, 1998)

$$\left| \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - 3x + 3\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left| \frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2} \right|.$$

$$\left( \infty+; \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge + 1- \right) \cap \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge - 1-; \infty- \right)$$

34. («Физтех», 2011)

$$\frac{20 - 4|x|}{|x^2 + 11x + 21| - 3} \leq 1.$$

$$\left( \infty+; \frac{2}{5} - \frac{2}{\sqrt{23}} \right] \cap (2-; 3- \cap [7-; 8- \cap (6-; \infty-)$$

35. (МГУ, мехмат, 1999) Найти все  $x$ , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x - 3| (|x - 5| - |x - 3|) - 6x \quad \text{и} \quad |x| (|x| - |x - 8|) + 24$$

неположительно, а его модуль не меньше модуля другого.

$$[9; 9]$$

### Равносильные переходы

36. («Физтех», 2017, 9)  $x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2(x^2 + x + 1)^2 \geq 0.$

$$\left[ \frac{2}{3}; 1- \right)$$

37. (МГУ, геологич. ф-т, 1998)  $(x^2 + 5x - 6) \cdot |x + 4|^{-1} < 0.$

$$(1; 4-) \cap (7-; 9-)$$

38. (МГУ, филологич. ф-т, 2006)

$$\frac{5 - 4x}{|x - 2|} \leq |2 - x|.$$

$$(\infty+; 2) \cap (2; 1] \cap [1-; \infty-)$$

39. (МГУ, ВШБ, 2004)

$$\frac{x + 1}{|x - 1|} \geq 1.$$

$$(\infty+; 1) \cap (1; 0]$$

40. (МГУ, географич. ф-т, 2003)

$$\frac{6}{|x|} \geq 7 + x.$$

$$\left[ \frac{6}{7} - \frac{6}{\sqrt{7}}; 0 \right) \cap (0; 1- \cap [9-; \infty-)$$

41. (МГУ, ВМК, 1998)

$$2x > \frac{5x + 3}{|x + 2|}.$$

$$(\infty + ; \frac{3}{8}) \cap (1 - ; 2 -) \cap (2 - ; \frac{1}{2\sqrt{5} + 6} -)$$

42. (МГУ, биологич. ф-т, 1999)

$$\frac{3}{|x - 1|} \geq 2x + 5.$$

$$[\frac{1}{8 - \sqrt{2}} ; 1] \cap (1 ; \frac{3}{4}] \cap [2 - ; \infty -)$$

43. (МГУ, социологич. ф-т, 2001)

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{|x|} \geq 2.$$

$$[\frac{2}{1} ; 0) \cap (0 ; 1 -)$$

44. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x + 1}{|2 - x|} + \frac{x + 1}{x - 5} \leq 0.$$

$$(5 ; \frac{3}{2}] \cap [1 - ; \infty -)$$

45. (МГУ, геологич. ф-т, 2007)

$$|x - 12| \leq \frac{x}{12 - x}.$$

$$(21 ; 9]$$

46. (МГУ, мехмат, 2000)

$$\frac{|x - 4| - |x - 1|}{|x - 3| - |x - 2|} < \frac{|x - 3| + |x - 2|}{|x - 4|}.$$

$$(3 ; 4) \cup (4 ; 7)$$

47. (МГУ, физический ф-т, 1998)  $|x^2 + 2x - 7| < 2x.$

$$(2 \wedge \wedge 11 \wedge \wedge 2 -)$$

48. (МГУ, физический ф-т, 2003)  $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0.$

$$(\infty + ; \frac{3}{4}] \cap [\frac{3}{2} - ; \infty -)$$

49. («Физтех», 2017, 9)  $|x^3 - 2x^2 + 2| \geq 2 - 3x.$

$$(\infty + ; 0] \cap [\frac{2}{11} \wedge - 1 ; \infty -)$$

50.  $||x^3 - x - 1| - 5| \geq x^3 + x + 8.$

$$[9 \wedge - ; \infty -)$$

51. (МГУ, ВМК, 2000)  $||x^2 + 3x - 8| - x^2| \geq 8 - x$ .

$$(\infty+; \mathbb{F}] \cap [0; \mathbb{I}-] \cap [\mathbb{F}-; \infty-)$$

52. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2006)

$$\frac{|x^2 + x - 12|}{x - 3} \geq 1.$$

$$(\infty+; \mathbb{E}]$$

53. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005)  $|x - 1| \leq |x|$ .

$$(\infty+; \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{I}}]$$

54. (Моск. матем. регата, 2001, 8)  $|x + 2000| < |x - 2001|$ .

$$(\frac{\mathbb{E}}{\mathbb{I}}; \infty-)$$

55. (МГУ, экономич. ф-т, 2001)  $|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|$ .

$$(\infty+; \mathbb{F}] \cap [\frac{\mathbb{F}}{\mathbb{E}\mathbb{I}}; 0]$$

56. (МГУ, химический ф-т, 2001)

$$\frac{1}{|x - 1|} > \frac{1}{|x + 1|}.$$

$$(\infty+; \mathbb{I}) \cap (\mathbb{I}; 0)$$

57. (МГУ, мехмат, 2008)  $||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|$ .

$$(\infty+; \mathbb{Z}] \cap \{\mathbb{I}\} \cap [\mathbb{I}-; \infty-)$$

58. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10-11)

$$||2 + x - x^2| - |x + 1|| \geq |x^2 - 2x - 3|.$$

$$(\infty+; \mathbb{Z}] \cap \{\mathbb{I}-\}$$