Уравнения и неравенства с модулем

В данной статье мы рассмотрим алгебраические уравнения и неравенства с модулем и изучим основные приёмы избавления от модуля. Разбираемые задачи не содержат тригонометрических, показательных, логарифмических функций и знаков радикала; такие комбинированные уравнения или неравенства будут предметом отдельной статьи.

Определение модуля

По определению **модуль** числа a есть следующая величина:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Например, $|7| = 7$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$. Одного лишь определения модуля уже хватает, чтобы начать решать задачи вступительных экзаменов в МГУ!

Задача 1. (*МГУ, физический ф-т, 1983*) Решить уравнение: $|2 - 5x^2| = 3$.

Решение. Если модуль числа равен 3, то само число равно 3 или -3. Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2 - 5x^2 = 3, \\ 2 - 5x^2 = -3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = -\dfrac{1}{5}, \\ x^2 = 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет решений, второе имеет корни ± 1.

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 2. (*МГУ, геологич. ф-т, 1979*) Решить уравнение: $|2x - 3| = 3 - 2x$.

Решение. Модуль числа равен этому числу со знаком минус — значит, само число неположительно ($|a| = -a$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant 0$). Следовательно, наше уравнение равносильно неравенству

$$2x - 3 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{3}{2}.$$

Ответ: $x \leqslant \frac{3}{2}$.

Задача 3. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2001*) Решить уравнение: $|x^2 - 13x + 35| = |35 - x^2|$.

Решение. Если модули двух чисел равны, то эти числа могут отличаться самое большее знаком:

$$|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b. \end{array}\right.$$

Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 13x + 35 = 35 - x^2, \\ x^2 - 13x + 35 = x^2 - 35 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 13x = 0, \\ 13x = 70. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = -\dfrac{1}{5}, \\ x^2 = 1. \end{array}\right.$$

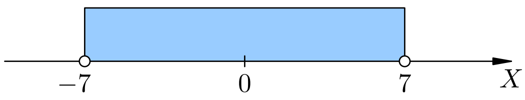
Дальнейшее элементарно.

Ответ: $x \in \left\{0, \frac{13}{2}, \frac{70}{13}\right\}$.

Геометрический смысл модуля

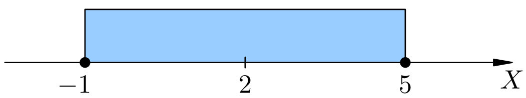
Понятие модуля обладает простым геометрическим смыслом: именно, $|x|$ есть расстояние от точки x до нуля. Более общим образом, $|x-a|$ *есть расстояние от точки* x *до точки* a. Давайте рассмотрим несколько элементарных примеров.

1. Решениями неравенства $|x|<7$ служат все те x, которые удалены от нуля на расстояние, меньшее 7. Они расположены на интервале $(-7;7)$.



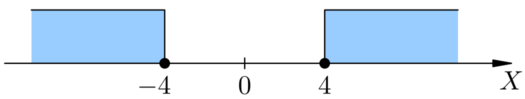
Множество решений неравенства $|x|<7$

2. Решения неравенства $|x-2|\leqslant 3$ суть все те x, которые удалены от точки 2 на расстояние, не превосходящее 3; они заполняют отрезок $[-1;5]$.



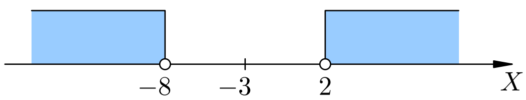
Множество решений неравенства $|x-2|\leqslant 3$

3. Решениями неравенства $|x|\geqslant 4$ являются все x, удалённые от нуля на расстояние, не меньшее 4. Это объединение двух непересекающихся лучей: $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$.



Множество решений неравенства $|x|\geqslant 4$

4. Решениями неравенства $|x+3|>5$ являются все те x, которые удалены от точки -3 на расстояние, большее 5. Это объединение двух непересекающихся лучей с выколотыми началами: $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.



Множество решений неравенства $|x+3|>5$

Задача 4. (*МГУ, геологич. ф-т, 2001*) Решить неравенство:

$$\frac{|x-3|+2}{|2x-3|-5}\leqslant 0.$$

Решение. Числитель дроби положителен при всех x, поэтому данное неравенство равносильно отрицательности знаменателя:

$$|2x-3|-5<0 \quad\Leftrightarrow\quad |2x-3|<5.$$

Дальше понятно: величина $2x$ удалена от точки 3 на расстояние, меньшее 5:

$$-2<2x<8,$$

откуда $-1<x<4$.

Ответ: $(-1;4)$.

Замена $|x-a|=t$

Задача 5. (*МГУ, физический ф-т, 1996*) Решить уравнение: $(x-7)^2-|x-7|=30$.

Решение. Поскольку $(x-7)^2=|x-7|^2$, удобно сделать замену $|x-7|=t$. Получаем:

$$t^2-t-30=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&t=6,\\&t=-5\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&|x-7|=6,\\&|x-7|=-5.\end{aligned}\right.$$

Второе уравнение полученной совокупности не имеет решений (так как модуль не может быть отрицательным). Решениями первого уравнения служат те значения x, которые удалены от точки 7 на расстояние 6, то есть 1 и 13.

Ответ: 1; 13.

Перебор случаев при снятии модуля

В некоторых задачах модуль снимается в процессе рассмотрения различных случаев знаков выражения под модулем с использованием непосредственно определения (1).

Задача 6. Решить уравнение: $|2-x|=5-4x$.

Решение. Имеем два случая, в зависимости от знака выражения под модулем. А именно, уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ 2-x=5-4x\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}2-x<0,\\ x-2=5-4x.\end{cases}$$

Решение первой системы: $x=1$. У второй системы решений нет.

Ответ: 1.

Не всегда бывает очевидно, принадлежит ли полученное значение x «текущему» промежутку, и тогда приходится использовать оценки.

Задача 7. Решить уравнение: $x^2+4|x-3|-7x+11=0$.

Решение. Как и в предыдущей задаче, в зависимости от знака выражения $x-3$ имеем два случая.

1) $x\geqslant 3$. Снимаем модуль:

$$x^2+4(x-3)-7x+11=0,$$
$$x^2-3x-1=0,$$
$$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \quad x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

Число x_2, будучи отрицательным, не удовлетворяет условию $x\geqslant 3$ и потому не является корнем исходного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли данному условию число x_1. Для этого составим разность и определим её знак:

$$x_1-3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}-3=\frac{\sqrt{13}-3}{2}=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{2}>0.$$

Значит, x_1 больше трёх и потому является корнем исходного уравнения.

2) $x < 3$. Снимаем модуль:

$$x^2 + 4(3 - x) - 7x + 11 = 0,$$
$$x^2 - 11x + 23 = 0,$$
$$x_3 = \frac{11 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_4 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2}.$$

Число x_3 больше, чем $11/2$, и потому не удовлетворяет условию $x < 3$. Проверим x_4:

$$x_4 - 3 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2} - 3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{29}}{2} < 0.$$

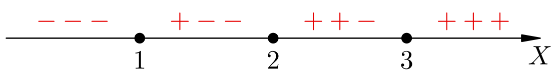
Значит, x_4 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{11-\sqrt{29}}{2}$.

Задача 8. Решить уравнение: $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

Решение. Казалось бы, нас ждёт рассмотрение шести случаев (три выражения под модулем, два знака). Но мы поступим разумнее — используем хорошо знакомый нам метод интервалов.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка. Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных промежутках. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, мы «экономим на случаях»: нам нужно рассмотреть не шесть случаев, а четыре (когда x находится в каждом из промежутков).

Случай 1: $x \geqslant 3$. Все модули снимаются «с плюсом»:

$$x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) = 4,$$
$$x = 5.$$

Полученное значение $x = 5$ удовлетворяет условию $x \geqslant 3$ и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2: $2 \leqslant x \leqslant 3$. Последний модуль теперь снимается «с минусом»:

$$x - 1 - 2(x - 2) + 3(3 - x) = 4,$$
$$x = 2.$$

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: $1 \leqslant x \leqslant 2$. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$x - 1 - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4,$$
$$4 = 4.$$

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка. Это означает, что все числа из промежутка $[1; 2]$ служат решениями данного уравнения.

Случай 4: $x \leqslant 1$. Все модули снимаются «с минусом»:

$$1 - x - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4,$$
$$x = 1.$$

Ничего нового. Мы и так знаем, что $x = 1$ является решением.

Ответ: $[1; 2] \cup \{5\}$.

Задача 9. Решить уравнение: $||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10$.

Решение. Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) $x \leqslant 3$. Получаем:

$$|3 - x - 2x + 1| = 4x - 10,$$
$$|4 - 3x| = 4x - 10.$$

Выражение под модулем обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$. Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1) $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 3$. Получаем в этом случае:

$$3x - 4 = 4x - 10,$$
$$x = 6.$$

Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) $x \leqslant \frac{4}{3}$. Тогда:

$$4 - 3x = 4x - 10,$$
$$x = 2.$$

Это значение x также не годится. Итак, при $x \leqslant 3$ решений нет.

2) $x \geqslant 3$. Имеем:

$$|x - 3 - 2x + 1| = 4x - 10,$$
$$|x + 2| = 4x - 10.$$

Здесь нам повезло: выражение $x + 2$ положительно при $x \geqslant 3$. Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$x + 2 = 4x - 10,$$
$$x = 4.$$

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Задача 10. (*МГУ, экономич. ф-т, 1984*) Решить неравенство: $2|x - 4| + |3x + 5| \geqslant 16$.

Решение. Разбираем три случая расположения x относительно точек $-\frac{5}{3}$ и 4.

1) $x \geqslant 4$. Имеем:

$$2(x - 4) + 3x + 5 \geqslant 16,$$
$$x \geqslant \frac{19}{5}\,.$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых $x \geqslant 4$. Иными словами, все числа из промежутка $[4; +\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 4$. Имеем в данном случае:

$$2(4-x)+3x+5 \geqslant 16,$$
$$x \geqslant 3.$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество $[3; 4]$.

3) $x \leqslant -\frac{5}{3}$. Имеем:

$$2(4-x)-3x-5 \geqslant 16,$$
$$x \leqslant -\frac{13}{5}\,.$$

Так как $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $\left(-\infty, -\frac{13}{5}\right]$ служат решениями исходного неравенства.

Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

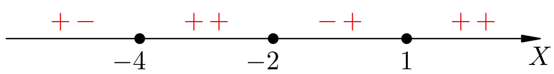
Ответ: $\left(-\infty, -\frac{13}{5}\right] \cup [3; +\infty)$.

До сих пор при снятии модуля мы исследовали знаки линейных функций (именно такие функции располагались под знаком модуля). Но иногда приходится снимать модуль с более сложных выражений — например, с квадратного трёхчлена.

Задача 11. (*МГУ, биологич. ф-т, 1998*) Решить неравенство:

$$|x^2+x-2|+|x+4| \leqslant x^2+2x+6.$$

Решение. Выражение x^2+x-2 положительно при $x < -2$, $x > 1$ и отрицательно при $-2 < x < 1$. Выражение $x+4$ положительно при $x > -4$ и отрицательно при $x < -4$. Расставим знаки наших выражений на числовой оси (первым идёт знак квадратного трёхчлена, вторым — знак линейной функции):



Теперь понятно, что нам нужно рассмотреть *три* случая.

1) $x \leqslant -4$. При снятии модулей квадратный трёчлен остаётся со знаком плюс, линейная функция — с минусом:

$$x^2+x-2-x-4 \leqslant x^2+2x+6,$$
$$x \geqslant -6.$$

Таким образом, здесь имеем решения $-6 \leqslant x \leqslant -4$.

2) $-4 \leqslant x \leqslant -2$ или $x \geqslant 1$. При снятии модулей оба выражения остаются с плюсом:

$$x^2+x-2+x+4 \leqslant x^2+2x+6,$$
$$2 \leqslant 6.$$

Получилось верное числовое равенство. Значит, рассматриваемые значения $-4 \leqslant x \leqslant -2$ и $x \geqslant 1$ являются решениями нашего неравенства.

3) $-2 \leqslant x \leqslant 1$. При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся с минусом, линейная функция — с плюсом:

$$-x^2-x+2+x+4 \leqslant x^2+2x+6,$$
$$x^2+x \geqslant 0.$$

Полученное неравенство имеет решения $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 0$. В пересечении с рассматриваемым промежутком имеем множество решений исходного неравенства: $-2 \leqslant x \leqslant -1$ или $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Объединяя множества решений в трёх рассмотренных случаях, получаем ответ.

Ответ: $[-6; -1] \cup [0; +\infty)$.

Исследование знака выражения под модулем и раскрытие модуля по определению (1) — метод универсальный, но не всегда самый эффективный. В некоторых случаях можно «выкрутиться» иначе, существенно упростив решение. Далее мы рассмотрим несколько таких стандартных ситуаций.

Уравнения вида $|A| = B$

Рассмотрим уравнение

$$|A| = B, \tag{2}$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную. Ясно, что если $B < 0$, то уравнение (2) не имеет решений. Если же $B \geqslant 0$, то уравнение (2) сводится к совокупности двух уравнений $A = \pm B$.

Таким образом, для уравнения (2) имеем равносильный переход:

$$|A| = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B, \end{array}\right. \\ B \geqslant 0. \end{cases}$$

Иными словами, мы решаем два уравнения, $A = B$ и $A = -B$, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию $B \geqslant 0$.

Задача 12. Решить уравнение: $|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1$.

Решение. Попробуйте ради интереса снять модуль с квадратного трёхчлена, как мы это сделали в предыдущей задаче, и посмотрите, к чему это приведёт. Поэтому мы будем действовать с помощью только что описанного равносильного перехода.

Наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 4 = 6x - 1, \\ 2x^2 - 3x - 4 = 1 - 6x, \end{array}\right. \\ 6x - 1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение совокупности (3) имеет корни

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{105}}{4}, \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{4}.$$

Второе уравнение совокупности (3) имеет корни

$$x_3 = 1, \quad x_4 = -\frac{5}{2}.$$

Теперь для каждого из полученных корней проверяем выполнение неравенства (3):

$$\begin{aligned}
&6x_1 - 1 = 6\cdot\frac{9+\sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50+6\sqrt{105}}{4} > 0;\\
&6x_2 - 1 = 6\cdot\frac{9-\sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50-6\sqrt{105}}{4} = \frac{\sqrt{2500}-\sqrt{3780}}{4} < 0;\\
&6x_3 - 1 = 6 - 1 > 0;\\
&6x_4 - 1 = -15 - 1 < 0.
\end{aligned}$$

Стало быть, годятся лишь x_1 и x_3.

Ответ: 1, $\frac{9+\sqrt{105}}{4}$.

Неравенства вида $|A| < B$

Пусть снова A и B — некоторые выражения с переменной. Оказывается, неравенство

$$|A| < B \tag{4}$$

равносильно системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \tag{5}$$

Действительно, если $B > 0$, то эквивалентность (4) $\Leftrightarrow$ (5) очевидна. В случае $B \leqslant 0$ неравенство (4) не имеет решений; но и система (5) также не имеет решений, поскольку выражение A не может быть одновременно меньше неположительной величины B и больше неотрицательной величины $-B$. Следовательно, и при $B \leqslant 0$ имеем (4) $\Leftrightarrow$ (5).

На экзамене вам придётся привести эти рассуждения, доказывающие законность рассмотренного перехода

$$|A| < B \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \tag{6}$$

Но оно того стоит! Это наглядно демонстрирует следующий пример.

Задача 13. Решить неравенство: $|x^2 - 3x + 1| < x - 2$.

Решение. Опять-таки ради интереса начните снимать модуль как раньше, исследуя знак квадратного трёхчлена. Во-первых, вы сразу получите иррациональные корни. Затем, после снятия модуля и упрощений, вас поджидают другие иррациональные корни, которые придётся сравнивать с первыми. Однако значительную часть этих технических проблем удаётся обойти, используя переход (6).

А именно, получаем:

$$|x^2 - 3x + 1| < x - 2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2 - 3x + 1 < x - 2, \\ x^2 - 3x + 1 > 2 - x \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 1 < x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < 1 - \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Вот и всё. Теперь легко получаем ответ.

Ответ: $\bigl(1 + \sqrt{2}; 3\bigr)$.

Переход (6) сохраняет свой вид при замене строгого равенства на нестрогое:

$$|A| \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство данной эквивалентности совершенно аналогично тому, что приведено выше.

Неравенства вида $|A| > B$

Неравенство

$$|A| > B \tag{8}$$

равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &A > B, \\ &A < -B. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

В самом деле, если $B \geqslant 0$, то эквивалентность (8) $\Leftrightarrow$ (9) очевидна. Если же $B < 0$, то неравенство (8) выполнено при всех допустимых значениях x; но и решением совокупности (9) служат все те же допустимые x, поскольку одно из неравенств совокупности заведомо выполнено (при $A \geqslant 0$ выполнено $A > B$, а при $A < 0$ выполнено $A < -B$). Следовательно, и при $B < 0$ имеет место эквивалентность (8) $\Leftrightarrow$ (9).

Разумеется, эквивалентность сохраняется при замене строгого неравенства на нестрогое:

$$|A| \geqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &A \geqslant B, \\ &A \leqslant -B. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Задача 14. (*МГУ, ВМК, 2000*) Решить неравенство:

$$\big||x^2 - 8x + 2| - x^2\big| \geqslant 2x + 2.$$

Решение. Здесь используются оба эквивалентных перехода (10) и (7). Имеем:

$$\big||x^2 - 8x + 2| - x^2\big| \geqslant 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &|x^2 - 8x + 2| - x^2 \geqslant 2x + 2, \\ &|x^2 - 8x + 2| - x^2 \leqslant -2x - 2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &|x^2 - 8x + 2| \geqslant x^2 + 2x + 2, \\ &|x^2 - 8x + 2| \leqslant x^2 - 2x - 2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 - 8x + 2 \geqslant x^2 + 2x + 2, \\ &x^2 - 8x + 2 \leqslant -x^2 - 2x - 2, \\ &\begin{cases} x^2 - 8x + 2 \leqslant x^2 - 2x - 2, \\ x^2 - 8x + 2 \geqslant -x^2 + 2x - 2 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x \leqslant 0, \\ &x^2 - 3x + 2 \leqslant 0, \\ &\begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3}, \\ x^2 - 5x \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x \leqslant 0, \\ &1 \leqslant x \leqslant 2, \\ &x \geqslant 5. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.