Многогранники

Задача 1. (*Моск. матем. регата, 2013, 11*) Какое наибольшее количество треугольных граней может иметь пятигранник?

Задача 2. (*«Высшая проба», 2017, 11.3*) Выпуклый многогранник имеет 8 вершин и 6 четырёхугольных граней. Может ли проекция этого многогранника на некоторую плоскость оказаться правильным 8-угольником?

Задача 3. (*Всеросс., 2006, округ, 10*) У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geqslant 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходится ровно три ребра, может быть у такого многогранника?

Задача 4. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями

$$x \pm y \pm z = n$$

(при всех целых n). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) с рациональными координатами не лежит ни в одной проведённой плоскости. Докажите, что найдётся натуральное k, при котором точка (kx_0, ky_0, kz_0) лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения.

Задача 5. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Существует ли выпуклый многогранник, у которого есть диагонали и каждая диагональ меньше любого ребра?

Задача 6. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Верно ли, что существуют выпуклые многогранники с любым количеством диагоналей? (*Диагональю* называется отрезок, соединяющий две вершины многогранника и не лежащий на его поверхности.)

Задача 7. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 10*) Выпуклые многогранники A и B не имеют общих точек. Многогранник A имеет ровно 2012 плоскостей симметрии. Каково наибольшее возможное количество плоскостей симметрии у фигуры, состоящей из A и B, если B имеет

а) 2012;

б) 2013 плоскостей симметрии?

в) Каков будет ответ в пункте б), если плоскости симметрии заменить на оси симметрии?

Задача 8. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 10*) Каждый из двух правильных многогранников P и Q разрезали плоскостью на две части. Одну из частей P и одну из частей Q приложили друг к другу по плоскости разреза. Может ли получиться правильный многогранник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть граней?

Задача 9. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 10*) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение рёбер икосаэдров.

$\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

Задача 10. (*Всеросс. по геометрии, 2009, 10*) Верно ли, что при любом n правильный $2n$-угольник является проекцией некоторого многогранника, имеющего не более, чем $n+2$ грани?

Задача 11. (*Всеросс. по геометрии, 2009, 10*) Можно ли вписать октаэдр в додекаэдр так, чтобы каждая вершина октаэдра была вершиной додекаэдра?

Задача 12. (*Всеросс. по геометрии, 2007, 10*) Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на некоторый вектор так, что рёбра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

Задача 13. (*ММО, 2017, 10.4*) У Васи есть камень (однородный, без внутренних полостей), имеющий форму выпуклого многогранника, у которого есть только треугольные и шестиугольные грани. Вася утверждает, что он разбил этот камень на две части так, что можно сложить из них куб (без внутренних полостей). Могут ли слова Васи быть правдой?

Задача 14. (*ММО, 2003, 10*) По рёбрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечётным числом сторон нечётно.

Задача 15. (*ММО, 1973, 10*) Доказать, что у всякого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Задача 16. (*ММО, 1992, 10*) Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с чётным числом сторон. Обязательно ли его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну рёбер разных цветов?

Задача 17. (*ММО, 1994, 11*) Придумайте многогранник, у которого нет трех граней с одинаковым числом сторон.

Задача 18. (*ММО, 1997, 11*) Можно ли разбить правильный тетраэдр с ребром 1 на правильные тетраэдры и октаэдры, длины рёбер каждого из которых меньше $1/100$?

Задача 19. (*ММО, 1999, 11*) Грани правильного октаэдра раскрашены в белый и чёрный цвет. При этом любые две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей чёрных граней.

Задача 20. (*ММО, 2015, 11*) Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

Задача 21. (*ММО, 2003, 11*) У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?

Задача 22. (*ММО, 2000, 11*) Можно ли расположить бесконечное число равных выпуклых многогранников в слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, так чтобы ни один многогранник нельзя было вынуть из слоя, не сдвигая остальных?

Задача 23. (*ММО, 2001, 11*) Докажите, что в пространстве существует такое расположение 2001 выпуклого многогранника, что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а каждые два касаются друг друга (то есть имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

Задача 24. (*ММО, 2008, 11*) Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на любую плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника: а) больше, чем $1/4$; б) не меньше, чем $1/9$; в) не меньше, чем $1/7$?

Задача 25. (*ММО, 1994, 11*) Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются (по внутренним точкам).

Задача 26. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 10–11*) Внутри выпуклого многогранника выбрана точка P и несколько прямых $\ell_1, \ldots, \ell_n$, проходящих через P и не лежащих в одной плоскости. Каждой грани многогранника поставим в соответствие ту из прямых $\ell_1, \ldots, \ell_n$, которая образует наибольший угол с плоскостью этой грани (если таких прямых несколько, выберем любую из них). Докажите, что найдётся грань, которая пересекается с соответствующей ей прямой.

Задача 27. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 10–11*) Существует ли многогранник, у которого отношение площадей любых двух граней не меньше 2?

Задача 28. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2009, 10–11*) Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся три ребра, из которых можно составить треугольник.

Задача 29. (*Турнир городов, 1990, 10–11*) Существует ли выпуклый многогранник, одно из сечений которого — треугольник (сечение не проходит через вершины), и в каждой вершине сходятся

а) не меньше пяти рёбер;

б) ровно пять рёбер?

Задача 30. (*Турнир городов, 2011, 10–11*) Грани выпуклого многогранника — подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и ещё одну пару равных граней).

Задача 31. (*Турнир городов, 2012, 10–11*) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят ровно три ребра, причем хотя бы два из этих трёх рёбер равны. Докажите, что многогранник имеет хотя бы три равных ребра.

Задача 32. (*Турнир городов, 2013, 10–11*) Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

а) равные многоугольники;

б) правильные многоугольники?

Задача 33. (*Турнир городов, 2000, 10–11*) Докажите, что у выпуклого $10n$-гранника найдётся n граней с одинаковым числом сторон.

Задача 34. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Существует ли такой невыпуклый многогранник, что из некоторой точки M, лежащей вне него, не видна ни одна из его вершин? (Многогранник сделан из непрозрачного материала, так что сквозь него ничего не видно.)

Задача 35. (*Турнир городов, 1990, 10–11*) Какое минимальное количество точек на поверхности

а) додекаэдра;

б) икосаэдра

надо отметить, чтобы на каждой грани была хотя бы одна отмеченная точка?

Задача 36. (*Турнир городов, 2010, 10–11*) Можно ли поверхность октаэдра оклеить несколькими правильными шестиугольниками без наложений и пробелов?