

Минимаксные задачи. 1

В настоящей статье рассматриваются уравнения и неравенства, которые не поддаются решению известными вам стандартными методами. Чтобы стало понятно, о каких задачах идёт речь, начнём с примера.

ЗАДАЧА 1. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите уравнение

$$\sqrt{1 - |x - 2|} + \sqrt{4x - x^2} = 3 + |x - 2|.$$

РЕШЕНИЕ. Напршивается замена $t = |x - 2|$, но это скорее для отвода глаз: даже после этой замены стандартное возведение в квадрат приводит к громоздким выкладкам и уравнению четвёртой степени. Дело тут совершенно в другом. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{1 - |x - 2|} + \sqrt{4 - (x - 2)^2} = 3 + |x - 2|. \quad (1)$$

Первое слагаемое левой части не превосходит $\sqrt{1} = 1$, второе слагаемое не превосходит $\sqrt{4} = 2$. Поэтому левая часть (1) не превосходит 3, причём равенство левой части тройке достигается лишь при $x = 2$. С другой стороны, правая часть (1) не меньше 3, а равенство правой части тройке достигается опять-таки при $x = 2$. Следовательно, равенство (1) возможно в том единственном случае, когда обе части одновременно равны 3, то есть при $x = 2$.

ОТВЕТ: 2.

В общем виде наши рассуждения выглядят следующим образом. Пусть имеется уравнение

$$f(x) = g(x). \quad (2)$$

Функции f и g могут быть устроены так, что это уравнение не решается обычными методами. Предположим, однако, что нам удалось найти такое число M , что для всех допустимых значений x выполнены неравенства $f(x) \geq M$ и $g(x) \leq M$. Тогда равенство (2) возможно лишь в том случае, когда одновременно $f(x) = M$ и $g(x) = M$; иными словами, наше «нерешаемое» уравнение (2) оказывается равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases} \quad (3)$$

А эту систему уже получается решить стандартными приёмами.

Решение системы (3) — это такое значение x , при котором функция $f(x)$ достигает своего минимума и в то же время функция $g(x)$ достигает своего максимума. Поэтому рассматриваемые задачи называются *минимаксными*¹.

Простейшая минимаксная ситуация — равенство нулю суммы неотрицательных выражений (квадратов, модулей, квадратных корней). В таком случае каждое слагаемое обязано обращаться в нуль, и это существенно упрощает решение.

ЗАДАЧА 2. (МФТИ, 1999) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 7x - y + 11 = 0, \\ y^2 + 3x - y + 15 = 0. \end{cases}$$

¹Другие названия данного метода — *метод оценок*, *метод экстремальных оценок*, *метод мажорант*. Его применения в тригонометрии можно найти в статье «[Тригонометрические уравнения. 2](#)».

РЕШЕНИЕ. Сложим наши уравнения:

$$x^2 + 10x + y^2 - 2y + 26 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 0.$$

Если сумма квадратов двух чисел равна нулю, то каждое из чисел равно нулю, поэтому из последнего равенства с необходимостью вытекает, что $x = -5$ и $y = 1$. Однако ответ писать рано: нужно проверить ещё, что полученная пара удовлетворяет каждому из уравнений. Проверка показывает, что это действительно так.

(Чтобы как следует прочувствовать эту логическую тонкость, замените в первом уравнении 11 на 12, а во втором 15 на 14. Результат сложения уравнений останется тем же, однако пара $(-5, 1)$ уже не удовлетворяет ни одному из уравнений, и поэтому новая система не имеет решений. Математик скажет, что условие $x = -5$ и $y = 1$, будучи необходимым, не является в данном случае достаточным.)

ОТВЕТ: $(-5, 1)$.

ЗАДАЧА 3. (МГУ, ДВИ, 2011) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 - 2xy + 7y^2 \leq 1, \\ 2x - 5y \geq 2. \end{cases} \quad (4)$$

РЕШЕНИЕ. Сначала упростим нашу систему введением новых переменных. Умножим первое неравенство на 4 и выделим полный квадрат:

$$16x^2 - 8xy + 28y^2 \leq 4 \Leftrightarrow 16x^2 - 8xy + y^2 + 27y^2 \leq 4 \Leftrightarrow (4x - y)^2 + 3 \cdot (3y)^2 \leq 4.$$

Теперь делаем замену

$$u = 4x - y, \quad v = 3y,$$

откуда

$$y = \frac{v}{3}, \quad x = \frac{1}{4} \left(u + \frac{v}{3} \right).$$

После несложных вычислений система (4) примет вид

$$\begin{cases} u^2 + 3v^2 \leq 4, \\ 3v - u \leq -4. \end{cases}$$

Складывая первое неравенство этой системы с удвоенным вторым, получим

$$u^2 + 3v^2 + 6v - 2u + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 + 3(v + 1)^2 \leq 0.$$

Отсюда $u = 1$ и $v = -1$, после чего легко находим x и y .

ОТВЕТ: $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$.

Если требуется решить уравнение с двумя и более неизвестными, то весьма вероятно, что в нём заложена минимаксная идея.

ЗАДАЧА 4. (ОММО, 2014) Найдите все решения уравнения

$$(y(x - 1))^2 + (x - 1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x - 1| = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $t = |x - 1|$:

$$y^2 t^2 + t^2 + y^2 + 1 - 4yt = 0.$$

Запишем полученное уравнение как квадратное относительно t с параметром y :

$$(y^2 + 1)t^2 - 4yt + y^2 + 1 = 0. \quad (5)$$

Найдём дискриминант:

$$D/4 = 4y^2 - (y^2 + 1)^2 = 2y^2 - y^4 - 1 = -(y^2 - 1)^2.$$

Дискриминант неположителен, и уравнение (5) имеет решение в том единственном случае, когда он равен нулю, то есть при $y = \pm 1$.

Если $y = 1$, то уравнение (5) принимает вид

$$2t^2 - 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Отсюда $|x - 1| = 1$, то есть $x = 0$ или $x = 2$. Таким образом, пары $(0, 1)$ и $(2, 1)$ служат решениями исходного уравнения.

Если $y = -1$, то уравнение (5) принимает вид

$$2t^2 + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Получаем уравнение $|x - 1| = -1$, которое не имеет решений.

ОТВЕТ: $(0, 1); (2, 1)$.

В некоторых случаях для получения нужных неравенств удобно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Если вам оно не знакомо, то почитайте статью «[Среднее арифметическое и среднее геометрическое](#)».

Здесь мы напомним лишь, что для любых чисел $a, b \geq 0$ верно неравенство

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad (6)$$

причём равенство достигается в том и только в том случае, когда $a = b$. В частности, если $a > 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad (7)$$

причём равенство достигается в том и только в том случае, когда $a = 1$.

ЗАДАЧА 5. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x) = \left| 4x^2 + 4x + 4\sqrt{x} - \frac{3}{x} \right| + \left| 3x^2 + \frac{1}{x} - 8 \right| \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{8}{x} + 16.$$

РЕШЕНИЕ. Для нахождения абсцисс общих точек нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$, то есть

$$\left| 4x^2 + 4x + 4\sqrt{x} - \frac{3}{x} \right| + \left| 3x^2 + \frac{1}{x} - 8 \right| = x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{8}{x} + 16. \quad (8)$$

Запишем это уравнение в виде

$$|u| + |v| = w, \quad (9)$$

где

$$u = 4x^2 + 4x + 4\sqrt{x} - \frac{3}{x}, \quad v = 3x^2 + \frac{1}{x} - 8, \quad w = x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{8}{x} + 16.$$

Заметим, что

$$|u| + |v| \geq u - v = x^2 + 4x + 4\sqrt{x} - \frac{4}{x} + 8 = w + 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 8 \geq w + 4 \cdot 2 - 8 = w \quad (10)$$

(мы использовали неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$, справедливое при $x > 0$; положительность x вытекает из условия задачи). Следовательно, решениями уравнения (9) могут быть лишь те значения x , при которых оба неравенства в оценке (10) превращаются в равенство. Но равенство $x + \frac{1}{x} = 2$ достигается лишь при $x = 1$. Остаётся проверить это значение: подставляем $x = 1$ в уравнение (8) и получаем верное равенство $13 = 13$. Итак, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку $(1, 13)$.

ОТВЕТ: $(1, 13)$.

Ещё один минимаксный сюжет, который периодически встречается в нестандартных уравнениях и неравенствах, состоит в привлечении геометрических соображений, связанных с неравенством треугольника.

Напомним, что расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ координатной плоскости вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (11)$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 2008) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36} + \sqrt{x^2 + y^2 - 16y + 64} = 10, \\ 5y^2 - 8x^2 = 8. \end{cases} \quad (12)$$

РЕШЕНИЕ. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+6)^2 + y^2} + \sqrt{x + (y-8)^2} = 10. \quad (13)$$

Рассмотрим точки $A(-6, 0)$, $B(0, 8)$ и $M(x, y)$. В соответствии с формулой (11) первое слагаемое в левой части (13) есть расстояние MA , а второе слагаемое — расстояние MB , так что

$$MA + MB = 10. \quad (14)$$

При любом расположении точки M на координатной плоскости выполнено неравенство треугольника: $MA + MB \geq AB$. При этом легко вычислить, что $AB = 10$. Следовательно, имеем неравенство

$$MA + MB \geq 10. \quad (15)$$

Сопоставляя (14) и (15), приходим к выводу, что, коль скоро в неравенстве треугольника достигается равенство, точка M должна располагаться на отрезке AB . Уравнение прямой AB нетрудно получить (сделайте это самостоятельно):

$$y = \frac{4}{3}x + 8.$$

При этом налагаем дополнительное условие $-6 \leq x \leq 0$ (чтобы точка M находилась именно на отрезке AB). Таким образом, исходная система (12) равносильна системе

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 8, \\ -6 \leq x \leq 0, \\ 5y^2 - 8x^2 = 8. \end{cases}$$

Дальнейшее очевидно, и вы легко доведёте решение до конца самостоятельно.

ОТВЕТ: $(-3, 4)$.

Задачи

1. (МГУ, физический ф-т, 1999) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x - 3} - |3y - 1| = 0, \\ 4\sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0. \end{cases}$$

(8; 1)

2. (МГУ, геологич. ф-т, 1997) Найти все решения уравнения

$$|x + y + 11 - 5xy| + |x^2y + xy^2 - 12| = 0.$$

$$\left(\left(\frac{9}{1411} \sqrt{\frac{9}{1} + \frac{9}{91}} - \left(\frac{9}{1411} \sqrt{\frac{9}{1} - \frac{9}{91}} \right) \right) : \left(\frac{9}{1411} \sqrt{\frac{9}{1} - \frac{9}{91}} - \left(\frac{9}{1411} \sqrt{\frac{9}{1} + \frac{9}{91}} \right) \right) : (1; 8) : (8; 1) \right)$$

3. (МГУ, ФНМ, 2002) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 3xy + y^2 + 1} + |2x^2 + 5xy - 3y^2| = 0.$$

(2; -1) : (2; 1)

4. (МГУ, химический ф-т, 1999) Решить уравнение:

$$x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|.$$

1

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Решите уравнение

$$|1 - x - y - xy| + |2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2xy - 9| + \frac{|xy|}{xy} = -1.$$

(8; 8), (8; 8)

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Решить уравнение:

$$\sqrt{x} (x^2 - 3x - 4)^3 + \sqrt{4 - x} (x^2 - 8x)^5 = 0.$$

4; 0

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Решите уравнение

$$x^7 \cdot \sqrt{2 + x - x^2} + (2 - x)^{11} \cdot \sqrt{3x - x^2} = 0.$$

2; 0

8. (МГУ, ф-т гос. управления, 2003) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

(z-; z; z)

9. Решить систему:

а)
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 5 = 4z, \\ x - y \geq z; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} z^2 + 7 \leq 14xy, \\ z - 2x - 2y = 1. \end{cases}$$

z- = z ; z- = n ; z- = x (z ; z = z ; z- = n ; z = x (z

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Координаты точки удовлетворяют соотношению $xy + yz + zx = 4$. На каком расстоянии от плоскости $z = -3$ может лежать эта точка, если известно, что расстояние от этой точки до начала координат равно двум?

z^2 = 4

11. (МФТИ, 1999) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 3y - 1 = 0, \\ y^2 + 2x + 9y + 14 = 0. \end{cases}$$

(z- ; z)

12. (МГУ, химический ф-т, 1998) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

(z- ; z ; z)

13. (Всеросс., 2015, II этап, 11) При каких значениях x и y верно равенство

$$x^2 + (1 - y)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}?$$

z^2 = n ; z = x

14. (ОММО, 2010) Найдите все решения системы

$$\begin{cases} xy - t^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$$

(0 ; 0 ; z- ; z-)

15. («Ломоносов», 2013, 8) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 1 = 0, \\ y^2 - 4z + 7 = 0, \\ z^2 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

(7, 1, 1)

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–10) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 2 = 0, \\ y^2 + 4z + 3 = 0, \\ z^2 + 4x + 4 = 0. \end{cases}$$

Нет решения

17. Решить уравнение:

а) $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6$; б) $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$.

1 = 1, 1 = x (9; 8 = 1, 1 = x) (в)

18. («Физтех», 2011, 9, 11) Найдите x и y , такие, что выполняется равенство

$$x^2 + 12xy + 52y^2 - 8y + 1 = 0.$$

22, 0 = 1, 5, 1 = x

19. (ОММО, 2014) Найдите все решения уравнения

$$4y^2(x^4 + 2x^2) + 8y^2 + x^4 + 2x^2 = 8|y|(x^2 + 1) - 2.$$

(2, 1 = 0)

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{9 - |x - 3|} = 5 + |x - 3|.$$

3

21. (МГУ, химический ф-т, 2001) Решить уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}.$$

2 = x

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x) = \left| 5x^2 + 6x - \frac{2}{x} \right| + \left| 3x^2 - 2\sqrt{x} - 9 - \frac{5}{x} \right| \quad \text{и} \quad g(x) = 2x^2 + 2\sqrt{x} + 21 - \frac{3}{x}.$$

(z'1)

23. (МГУ, ф-т психологии, 2002) Решить уравнение

$$|x^3 + 7x^2 - 11x - 6| + |x^3 - 12x^2 - 5x + 3| = 18x^2 - 2x - 13.$$

2

24. (МФТИ, 2001) Решить неравенство

$$\frac{1}{4 - \sqrt{x^2 - 2x - 8}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 12}}.$$

(∞+;9) ∩ {2-} ∩ (4-;∞-)

25. (МГУ, химический ф-т, 2002) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y - 1| \leq 1, \\ |x - 2| + |y - 1| \leq 1. \end{cases}$$

(1'1)

26. («Физтех», 2015, 10–11)

$$\begin{cases} 2x \geq 14 + y, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy. \end{cases}$$

(z'8)

27. («Физтех», 2015, 10–11)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$$

$\left(\frac{9\wedge}{1} - \frac{9\wedge}{2} -\right), \left(\frac{9\wedge}{1} - \frac{9\wedge}{2}\right), \left(\frac{9\wedge}{1}, \frac{9\wedge}{2} -\right), \left(\frac{9\wedge}{1}, \frac{9\wedge}{2}\right)$

28. (МГУ, ДВИ, 2011) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1, \\ 4x + 7y \geq 3. \end{cases}$$

$\left(\frac{6}{1}, \frac{6}{2}\right)$

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Решите систему

$$\begin{cases} |x| + 6y \geq 1, \\ 37x^2 + 37y^2 \leq 1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{28}{9}, \frac{28}{1}\right)$$

30. (МФТИ, 2001) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3 \leq 0, \\ y^2 + 6y + 18x \leq 0. \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1\right); \left(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}\right)$$

31. (МФТИ, 2008) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 5, \\ 4x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

32. (МГУ, ВМК, 1996) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}, \frac{29}{180 + 2\sqrt{415}}\right)$$

33. («Ломоносов», 2012, 9) Решите уравнение

$$|1 - x| + |9 - x| + |25 - x| + |49 - x| + |81 - x| = 120.$$

$$25$$

34. («Ломоносов», 2018, 10–11) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{13x^2 + 24xy + 13y^2 - 14x - 16y + 61}{(4 - 16x^2 - 8xy - y^2)^{7/2}}.$$

$$\frac{16}{7}$$