# Минимаксные задачи. 2

Мы продолжаем рассмотрение минимаксных уравнений и неравенств, которое было начато в листках «Минимаксные задачи. 1» и «Минимаксные задачи в тригонометрии». Данный листок посвящён минимаксным задачам с участием показательных и логарифмических функций.

Задача 1. Решить уравнение

$$3^{x^2+1} = 2\cos x + 1. \tag{1}$$

Решение. Одновременное присутствие показательной и тригонометрической функций говорит о том, что обычные методы тут не работают. Однако нас выручает минимаксная идея.

Заметим, что $x^2 \geqslant 0$ при всех $x$, и потому $3^{x^2+1} \geqslant 3$. Вместе с тем имеем $\cos x \leqslant 1$, откуда $2\cos x + 1 \leqslant 3$. Итак, левая часть нашего уравнения не меньше 3, а правая часть не больше 3; следовательно, равенство в (1) возможно лишь в том случае, когда обе части *одновременно* равны 3. Иными словами, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 3^{|x|+1} = 3, \\ 2\cos x + 1 = 3. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы находим $x = 0$. Подставляем во второе уравнение системы и убеждаемся, что $x = 0$ годится. Следовательно, это и есть ответ.

Ответ: 0.

Задача 2. Решить уравнение:

$$6x - x^2 - 7 = \log_2(4 + |x - 3|).$$

Решение. Для левой части имеем оценку сверху:

$$6x - x^2 - 7 = 2 - (x - 3)^2 \leqslant 2.$$

В то же время, поскольку $|x - 3| \geqslant 0$, для правой части получаем оценку снизу:

$$\log_2(4 + |x - 3|) \geqslant \log_2 4 = 2.$$

Следовательно, наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 6x - x^2 - 7 = 2, \\ \log_2(4 + |x - 3|) = 2, \end{cases}$$

откуда $x = 3$.

Ответ: 3.

Задача 3. (*МГУ, ИСАА, 1999*) Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 \leqslant 65 - x^4 - 3^{x+3}, \\ x^2 + 3^{x+2} \geqslant y^2 - 2y + 25. \end{cases}$$

Решение. Умножая второе неравенство на 3, перепишем систему в виде двойного неравенства:

$$3y^2 - 6y + 75 - 3x^2 \leqslant 3^{x+3} \leqslant 65 - x^4 - x^2 + 2y^2. \tag{2}$$

Для выполнения неравенства (2) необходимо (но не достаточно!), чтобы выполнялось более слабое неравенство

$$3y^2 - 6y + 75 - 3x^2 \leqslant 65 - x^4 - x^2 + 2y^2, \tag{3}$$

которое легко приводится к виду

$$\left(x^2 - 1\right)^2 + (y-3)^2 \leqslant 0.$$

Отсюда находим $x = \pm 1$, $y = 3$.

Однако, повторяем, неравенство (3) является следствием неравенства (2), но не равносильно ему; иными словами, неравенство (3) может иметь решения, не являющиеся решениями неравенства (2). Следовательно, найденные значения $x$ и $y$ надо проверить.

Подставляя поочерёдно пары $(1,3)$ и $(-1,3)$ в неравенство (2), убеждаемся, что первая пара годится, а вторая — нет.

Ответ: $(1,3)$.

Задача 4. (*МГУ, ф-т психологии, 1984*) Решить систему:

$$\begin{cases} 3^{2x+y-1} + 4\cdot 3^{2x-1} \leqslant 2, \\ 4x + y \geqslant 2 - \log_3 4. \end{cases}$$

Решение. К левой части первого неравенства применим неравенство $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ (справедливое для неотрицательных $a$ и $b$):

$$3^{2x+y-1} + 4\cdot 3^{2x-1} \geqslant 2\sqrt{3^{2x+y-1}\cdot 4\cdot 3^{2x-1}} = 4\sqrt{3^{4x+y-2}}\,. \tag{4}$$

Теперь с учётом второго неравенства системы получаем:

$$3^{2x+y-1} + 4\cdot 3^{2x-1} \geqslant 4\sqrt{3^{2-\log_3 4-2}} = 2. \tag{5}$$

В то же время первое неравенство системы даёт обратную оценку. Следовательно, должно выполняться равенство

$$3^{2x+y-1} + 4\cdot 3^{2x-1} = 2.$$

А оно будет иметь место только одновременном достижении равенства в (4) и (5), то есть при равенстве слагаемых и, кроме того, при достижении равенства во втором неравенстве системы:

$$\begin{cases} 3^{2x+y-1} = 4\cdot 3^{2x-1} = 1, \\ 4x + y = 2 - \log_3 4. \end{cases}$$

Дальнейшее элементарно.

Ответ: $x = \frac{1-\log_3 4}{2}$, $y = \log_3 4$.

## Задачи

**1.** Решить уравнение:

$$\log_3(x^2+9) = 2\cos x.$$

$\boxed{x = 0}$

**2.** Решить уравнение:

$$1 + \sin^2 \pi x = 2^{-|x+7|}.$$

$\boxed{x = -7}$

**3.** Решить уравнение:

$$2\cos x = 2^x + 2^{-x}.$$

$\boxed{x = 0}$

**4.** (*ОММО, 2010*) Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \log_2(x^2+1) + \log_2(y^2+1) = 4, \\ x^2 + y^2 = 2\cos^2 z + 4. \end{cases}$$

$\boxed{x = \pm\sqrt{3},\ y = \pm\sqrt{3},\ z = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

**5.** Решить уравнение:

$$\log_3 \pi x + \log_{\pi x} 3 = \frac{2}{\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y) + 2}.$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}}$

**6.** Решить неравенство:

а) $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) \geqslant 1$;

б) $(4x - x^2 - 3)\log_2\left(1 + \cos^2 \pi x\right) \geqslant 1$.

$\boxed{\text{а) } x = 2\text{; б) } x = 2}$

**7.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Решите уравнение

$$\log_3\left(2x^2 + 4x + 29\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(31 - 2x - x^2\right) = \log_{\frac{1}{5}}\left(3x^2 + 6x + 28\right).$$

$\boxed{-1}$

**8.** (*МГУ, химический ф-т, 1993*) Решить уравнение:

$$2\left(1+\sin^2(x-1)\right)=2^{2x-x^2}.$$

$\boxed{x=1}$

**9.** (*МГУ, географич. ф-т, 1994*) Решить уравнение:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\operatorname{tg}\pi x+\operatorname{ctg}\pi x)=8(2x^2+3x+1).$$

$\boxed{x=-\frac{3}{4}}$

**10.** (*МГУ, мехмат, 1999*) Решить уравнение:

$$|\log_2(2x+7)|=\log_2\left(1+|x+3|\right)+\log_2\left(1-|x+3|\right).$$

$\boxed{x=-3}$

**11.** (*МГУ, мехмат, 1997*) Решить систему:

$$\begin{cases} |x+1|-1\leqslant x, \\ \left(2^x+2^{x-2}+2^{2-x}\right)\cos\dfrac{\pi x}{2}+\cos\pi x+3+2^{2x-3}=0. \end{cases}$$

$\boxed{x=2}$

**12.** (*МГУ, ИСАА, 1999*) Решить систему:

$$\begin{cases} 2x^2-\log_2\left(y\sqrt{2}+6\right)^3-16\geqslant y^4-3x-y^2, \\ x^2-y^2\leqslant\log_2\left(y\sqrt{2}+6\right)+x+1. \end{cases}$$

$\boxed{x=3,\ y=\sqrt{2}}$

**13.** (*МГУ, ф-т психологии, 1984*) Решить систему:

$$\begin{cases} 3^{x+2y-1}+2\cdot 3^{3y-1}\leqslant 2, \\ x+5y\geqslant 2-\log_3 2. \end{cases}$$

$\boxed{x=\frac{1+2\log_3 2}{3},\ y=\frac{1-\log_3 2}{3}}$

**14.** (*МГУ, ф-т почвоведения, 1989*) Решить неравенство:

$$\left(x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \cdot \log_{\sqrt{3}}\left(2 + 2\cos^2 x - \cos 2x + 3\cos^2 \pi x\right) \geqslant -2.$$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

**15.** (*МГУ, филологич. ф-т, 1998*) Решить неравенство:

$$\sqrt[4]{13 + 3^{3^{1-\cos x}}} \leqslant \sqrt{5e^{-2x^2} - 1}\,.$$

$\boxed{x = 0}$

**16.** (*МГУ, химический ф-т, 2000*) Решить уравнение:

$$2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

**17.** (*МГУ, химический ф-т, 1979*) Найти все решения системы

$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left|\dfrac{y \sin x}{1 + 3y}\right|, \\ (6y^2 + 2y)\left(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}\right) = 25y^2 + 6y + 1 \end{cases}$$

такие, что $|y| \leqslant 1$.

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ y = -1,\ n \in \mathbb{Z}}$