# Медианы, высоты, биссектрисы

Задача 1. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) В треугольнике $ABC$ биссектриса $AK$ перпендикулярна медиане $CL$. Докажите, что в треугольнике $BKL$ также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Задача 2. (*Турнир городов, 2014, 8–9*) В треугольнике $ABC$ угол $C$ — прямой. На катете $CB$ как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка $N$ — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая $AN$ делит пополам биссектрису угла $C$.

Задача 3. (*Турнир городов, 2010, 8–9*) На сторонах $BC$ и $CD$ ромба $ABCD$ взяли точки $P$ и $Q$ соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $APQ$ лежит на диагонали $BD$ ромба.

Задача 4. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами?

Задача 5. (*ММО, 2016, 8.3*) На медиане $AM$ треугольника $ABC$ нашлась такая точка $K$, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 6. (*Олимпиада им. Эйлера, РЭ, 2016.8*) Точки $M$ и $N$ — середины биссектрис $AK$ и $CL$ треугольника $ABC$ соответственно. Докажите, что угол $ABC$ прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45°$.

Задача 7. (*ММО, 2016, 9.2*) В треугольнике $ABC$ на продолжении медианы $CM$ за точку $C$ отметили точку $K$ так, что $AM = CK$. Известно, что угол $BMC$ равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 8. (*ММО, 2015, 10.5*) Дан треугольник $ABC$. Проведены высота $AH$ и медиана $CM$. Обозначим точку их пересечения через $P$. Высота, проведённая из вершины $B$ треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки $H$ на прямую $CM$, в точке $Q$. Докажите, что прямые $CQ$ и $BP$ перпендикулярны.