Олимпиадная математика

Задачник восьмиклассника

Данное пособие предназначено для учеников 8 класса, увлечённых математикой и желающих готовиться к олимпиадам высокого уровня.

Восьмой класс — важнейший этап в жизни московских олимпиадников. На смену «игровым» форматам Математического праздника и Турнира Архимеда[1] приходит Московская математическая олимпиада (ММО). Помимо этого восьмиклассники впервые получают возможность почувствовать всероссийский уровень, участвуя в региональном и заключительном этапах олимпиады им. Леонарда Эйлера. Соответственно, сложность предлагаемых задач существенно возрастает.

Пособие содержит:

- все задачи ММО, предлагавшиеся в 8 классе с 1992 года, а также отдельные задачи ММО более ранних лет;
- все задачи региональных и заключительных этапов олимпиады Эйлера с момента её появления (2009 год);
- все задачи, предлагавшиеся в 8 классе на четвёртом (зональном или федеральном окружном) этапе Всероссийской олимпиады в 1996—2007 годах и на заключительном этапе 2007 года.

Кроме того,

- в начале некоторых разделов встречаются задачи Математического праздника (7 класс) — чтобы проще и быстрее было освоиться с данной темой;
- повсеместно присутствуют задачи 9—11-х классов ММО и Всероссийской олимпиады — чтобы поддерживать энтузиазм и видеть дальнейшие перспективы.

Олимпиадные задачи, включённые в пособие, имеют маркировку, расшифровка которой ясна из следующих примеров.

- [Mos — 2013.8.3] — ММО, 2013 год, 8 класс, задача №3;
- [Eul — 2016.R.4] — олимпиада Эйлера, 2016 год, региональный (R) этап, задача №4;
- [Eul — 2016.F.7] — олимпиада Эйлера, 2016 год, заключительный (F) этап, задача №7;
- [Vse — 2005.R.8.6] — Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2005 год, предпоследний (R) этап, 8 класс, задача №6;
- [Vse — 2011.F.9.1] — Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2011 год, заключительный (F) этап, 9 класс, задача №1;
- [Mpr — 2004.7.1] — Математический праздник, 2004 год, 7 класс, задача №1.

[1] Это московские городские олимпиады для 6—7 классов. На них предлагается по шесть задач на два часа.

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности. Варианты ММО и Матпраздника содержат обычно по шесть задач, и сложность в целом возрастает с увеличением номера. С олимпиадой Эйлера и Всероссийской олимпиадой дело обстоит чуть сложнее, поэтому расскажем о данных олимпиадах несколько подробнее.

Всероссийская олимпиада школьников по математике проводится с 1993 года (в 1991 году и ранее проходила Всесоюзная олимпиада, а в переходном 1992 году — Межреспубликанская). Вплоть до 2008 года Всероссийская олимпиада состояла из пяти этапов: школьный, муниципальный, региональный, зональный (с 2002 года — федеральный окружной) и заключительный. В 2009 году федеральный окружной этап был ликвидирован, и с тех пор заключительный этап следует сразу за региональным. Соответственно в нашей маркировке задач Всероссийской олимпиады буква R означает зональный или федеральный окружной этап (до 2009 года) и региональный этап (начиная с 2009 года).

Восьмиклассники участвовали в федеральном окружном этапе с 1996 года, однако финал для них не проводился. Единственным исключением явился 2007 год, когда впервые состоялся заключительный этап в 8 классе. Однако уже в 2008 году для восьмиклассников отменили как финал, так и федеральный окружной этап, а с 2009 года (по новому Положению о Всероссийской олимпиаде школьников) региональный и заключительный этапы проводятся только для учеников 9—11 классов.

Чтобы компенсировать этот недостаток, в 2009 году была организована олимпиада им. Леонарда Эйлера, призванная заменить восьмиклассникам Всероссийскую олимпиаду. Она проводится в три этапа: дистанционный[2], региональный и заключительный. Сложность задач на региональном и заключительном этапах олимпиады Эйлера примерно такая же, как соответственно на федеральном окружном и заключительном этапах прежней Всероссийской олимпиады для восьмиклассников. Задачи олимпиады Эйлера составляются членами предметной комиссии Всероссийской олимпиады по математике.

Последние два этапа Всероссийской олимпиады и олимпиады Эйлера проводятся (каждый) в два дня. И в первый, и во второй день предлагается по четыре задачи, расположенные обычно по возрастанию сложности. Задачи первого дня имеют номера с 1 по 4, задачи второго дня — с 5 по 8. Соответственно, задачи 1 и 5 являются самыми «простыми», задачи 2 и 6 — посложнее, задачи 3 и 7 — ещё сложнее и, наконец, задачи 4 и 8 — как правило, самые трудные задачи.

В 2017/18 году на региональном этапе (как олимпиады Эйлера, так и Всероссийской олимпиады) предлагалось по пять задач в каждый из двух дней. Соответственно, задачи первого дня регионального этапа имеют номера с 1 по 5, второго — с 6 по 10. Заключительный этап (как олимпиады Эйлера, так и Всероссийской олимпиады) проводился по старой схеме: по четыре задачи в каждый из двух дней.

Пособие постоянно пополняется и модифицируется. Последняя версия пособия находится по адресу `http://mathus.ru/math/matholymp8.pdf`.

Группировка задач по темам во многом следует тематическому каталогу [3] (как наиболее удачному с нашей точки зрения).

[2] На региональный этап можно попасть и минуя дистанционный — через другие олимпиады, который входят в соответствующий «список выводящих соревнований».

Литература

[1] Н. Х. Агаханов и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993—2006. Окружной и финальный этапы. М.: МЦНМО, 2007.

[2] Р. М. Фёдоров и др. Московские математические олимпиады. 1993—2005. М.: МЦНМО, 2006.

[3] Сайт http://problems.ru.

[4] Сайт олимпиады им. Леонарда Эйлера http://www.matol.ru.

Оглавление

Глава 1

Арифметика

1.1 Десятичная запись

1.1.1. [Mos — 2012.8.1] На доске написаны четыре трёхзначных числа, в сумме дающие 2012. Для записи их всех были использованы только две различные цифры. Приведите пример таких чисел.

1.1.2. [Mos — 2008.8.1] Верно ли, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа?

1.1.3. [Eul — 2018.R.6; Vse — 2018.R.9.6] На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте?

1.1.4. [Mos — 2015.9.1] Существует ли такое натуральное число n, что числа n, n^2, n^3 начинаются на одну и ту же цифру, отличную от единицы?

1.1.5. [Mos — 2017.9.1] Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру.

1.1.6. [Mos — 2018.10.1] Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2018»?

1.1.7. [Mos — 1994.8.2] Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

1.1.8. [Mos — 2003.8.2] Придумайте десятизначное число, в записи которого нет нулей, такое, что при прибавлении к нему произведения его цифр получается число с таким же произведением цифр.

1.1.9. [Vse — 1999.R.8.2;10.1] К натуральному числу A приписали справа три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до A. Найдите A.

1.1.10. [Vse — 2007.R.8.2] Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стёр некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

1.1.11. [Vse — 2004.R.8.7] Набор пятизначных чисел $\{N_1, \ldots, N_k\}$ таков, что любое пятизначное число, все цифры которого идут в возрастающем порядке, совпадает хотя бы в одном разряде хотя бы с одним из чисел $N_1, \ldots, N_k$. Найдите наименьшее возможное значение k.

1.1.12. [Vse — 1999.R.9.1] По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N, $N \geqslant 2$. При этом для любой пары соседних чисел имеется хотя бы одна цифра, встречающаяся в десятичной записи каждого из них. Найдите наименьшее возможное значение N.

1.1.13. [Vse — 2010.R.9.3;10.2] Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

1.1.14. [Eul — 2017.F.1] Можно ли за каждую цифру от 0 до 9 назначить цену так, чтобы все 10 цен были различны и нашлись 20 идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых, кроме первого, стоит дороже предыдущего? Здесь цена натурального числа — это сумма цен цифр в его записи.

1.1.15. [Eul — 2016.F.4] Даны $2n$-значное натуральное число a и натуральное число k. Числа a и ka записали на ленте и каждую из двух записей разрезали на двузначные числа, начиная с последних цифр (при этом числа 00, 01, …, 09 здесь тоже считаются двузначными; если в числе ka оказалось нечётное количество цифр, к нему спереди приписали 0). Оказалось, что у числа a полученные двузначные числа строго убывают справа налево (от младших разрядов числа a к старшим), а у числа ka — строго возрастают. Докажите, что $k \geqslant n$.

1.1.16. [Eul — 2009.F.8] На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$-м месте?

1.1.17. [Mos — 2016.9.5] Существует ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

1.2 Ребусы

1.2.1. [Mos — 2010.8.1] `КУБ` является кубом. Докажите, что `ШАР` кубом не является. (`КУБ` и `ШАР` — трёхзначные числа, разные буквы обозначают различные цифры.)

1.2.2. [Mos — 2017.8.1] Замените в выражении $AB^C = DE^F$ буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным, использовав каждую цифру от 1 до 6 ровно один раз. (Пояснение: AB^C — двузначное число из цифр A и B, возведённое в степень C. Достаточно привести один способ замены.)

1.3 Арифметические действия

1.3.1. [Mos — 2014.8.1] Витя хочет найти такое выражение, состоящее из единиц, скобок, знаков «+» и «×», что

— его значение равно 10;

— если в этом выражении заменить все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», всё равно получится 10.

Приведите пример такого выражения.

1.3.2. [Mos — 2018.8.1] Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа a, b и c, что числа $a+b+c$ и $a \cdot b \cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел?

1.3.3. [Vse — 1996.R.8.1] Мороженое стоит 2000 рублей. У Пети имеется

$$400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$$

рублей. Достаточно ли у Пети денег на мороженое?

1.3.4. [Mos — 2003.9.2] Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.

1.4 Чётность

1.4.1. [Eul — 2010.R.5], [Vse — 2010.R.9.5] Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность (из большего вычел меньшее). В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

1.4.2. [Vse — 2006.R.8.5;9.5] На доске записано произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения ровно 32 из этих выражений чётные. Какое наибольшее количество чётных чисел среди $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ могло быть?

1.4.3. [Mos — 2018.8.2] В строку выписано 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

1.4.4. [Mos — 2018.9.1] В строку выписано 81 ненулевое число. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел?

1.4.5. [Mos — 2004.9.1] Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12:00 повышается или понижается на 17% (курс не округляется). Может ли курс акций дважды принять одно и то же значение?

1.4.6. [Vse — 2013.R.9.1;10.1] Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N?

1.4.7. [Vse — 1998.R.8.6] У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.

1.4.8. [Mos — 1993.8.3] На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

1.4.9. [Mos — 2005.8.4] По кругу расставлены 2005 натуральных чисел. Доказать, что найдутся два соседних числа такие, что после их выкидывания оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой.

1.4.10. [Mos — 2011.8.4] Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечётного числа сторон клеток квадрата 100×100, соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток?

1.4.11. [Mos — 1973.8.5] В трёх вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т. е. прыгают друг через друга. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли один из них попасть в четвёртую вершину квадрата?

1.4.12. [Eul — 2013.R.7] Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

1.4.13. [Eul — 2015.F.5] 40 разбойников переправились с помощью двухместной лодки с левого берега реки на правый (некоторые рейсы, возможно, выполнялись в одиночку). Могло ли случиться, что каждая пара разбойников пересекла реку вместе ровно один раз (с левого берега на правый или с правого на левый)?

1.4.14. [Eul — 2012.F.5] Можно ли расставить на рёбрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

1.4.15. [Eul — 2011.F.2] За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?

1.4.16. [Eul — 2017.F.7] Дана окружность длины 90. Можно ли отметить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?

1.4.17. [Vse — 2007.F.9.2] На доске написали 100 дробей, у которых в числителях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу, и в знаменателях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу. Оказалось, что сумма этих дробей есть несократимая дробь со знаменателем 2. Докажите, что можно поменять местами числители двух дробей так, чтобы сумма стала несократимой дробью с нечётным знаменателем.

1.5 Делимость

1.5.1. [Eul — 2012.R.1] Назовем четырёхзначное число x *забавным*, если каждую его цифру можно увеличить или уменьшить на 1 (при этом цифру 9 можно только уменьшать, а 0 — только увеличивать) так, чтобы в результате получилось число, делящееся на x.

а) Найдите два забавных числа.

б) Найдите три забавных числа.

в) Существуют ли четыре забавных числа?

1.5.2. [Vse — 1998.R.8.1] Существуют ли такие n-значные числа M и N, что все цифры M — чётные, все цифры N — нечётные, каждая цифра от 0 до 9 встречается в десятичной записи M или N хотя бы один раз, и M делится на N?

1.5.3. [Mos — 2011.8.2] Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

1.5.4. [Mos — 1998.8.2] Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

1.5.5. [Mos — 1995.8.2] Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

1.5.6. [Mos — 1995.9.1] Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

1.5.7. [Mos — 2006.9.1] Васе на 23 февраля подарили 777 конфет. Вася хочет съесть все конфеты за n дней, причём так, чтобы каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа n это возможно?

1.5.8. [Vse — 2018.R.10.6;11.6] Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n},\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-2},\ \frac{3}{n-3},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

1.5.9. [Eul — 2017.R.2] Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трёх из них — делится.

1.5.10. [Vse — 1997.R.8.6;9.6] Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

1.5.11. [Vse — 2018.R.9.2] На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

1.5.12. [Vse — 2000.R.9.2] Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c, большие 1 и такие, что $2^a + 1$ делится на b, $2^b + 1$ делится на c, а $2^c + 1$ делится на a?

1.5.13. [Eul — 2015.R.3] Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.

1.5.14. [Mos — 2004.8.4] Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12:00 повышается или понижается на $n\%$, где n — фиксированное натуральное число, меньшее 100 (курс не округляется). Существует ли n, для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение?

1.5.15. [Mos — 2016.8.4] Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только чётные цифры.

1.5.16. [Mos — 1997.8.4] а) Докажите, что существует натуральное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку остаётся составным.

б) Существует ли такое 1997-значное число?

1.5.17. [Mos — 2015.9.2] По кругу в некотором порядке расставлены все натуральные числа от 1 до 1000 таким образом, что каждое из чисел является делителем суммы двух своих соседей. Известно, что рядом с числом k стоят два нечётных числа. Какой чётности может быть число k?

1.5.18. [Mos — 1976.8.2] Квадратная комната разгорожена перегородками на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.

1.5.19. [Mos — 1995.9.3] Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ оказаться простым?

1.5.20. [Vse — 2011.R.9.5] Найдите все такие числа a, что для любого натурального n число $an(n + 2)(n + 4)$ будет целым.

1.5.21. [Mos — 2012.8.5] Рациональные числа x, y и z таковы, что все числа $x+y^2+z^2$, x^2+y+z^2 и $x^2 + y^2 + z$ целые. Докажите, что число $2x$ целое.

1.5.22. [Eul — 2015.F.6] Натуральное число называется *совершенным*, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2?

1.5.23. [Eul — 2014.F.3] На сотом году правления Казначей Бессмертный решил начать выпускать новые монеты. В этом году он выпустил в обращение неограниченный запас монет достоинством $2^{100} - 1$, на следующий год — достоинством $2^{101} - 1$, и т. д. Как только достоинство очередной новой монеты можно будет без сдачи набрать выпущенными ранее новыми монетами, Казначея сместят. На каком году его правления это случится?

1.5.24. [Vse — 2017.F.10.5] На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n, увеличенные на 1. Найдите все такие числа n, для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m. (*Собственными делителями* натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.)

1.6 Признаки делимости

1.6.1. [Mpr — 2004.7.1] Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

1.6.2. [Mpr — 1995.7.5] Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

1.6.3. [Mpr — 2011.7.5] В справочнике «Магия для чайников» написано:

> Замените в слове `ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ` одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.)

1.6.4. [Vse — 2006.R.8.1;9.1] Найдите какое-нибудь такое девятизначное число N, состоящее из различных цифр, что среди всех чисел, получающихся из N вычёркиванием семи цифр, было бы не более одного простого.

1.6.5. [Mos — 2007.9.1] Номер нынешней олимпиады (70) образован последними цифрами года её проведения, записанными в обратном порядке. Сколько ещё раз повторится такая ситуация в этом тысячелетии?

1.6.6. [Vse — 2007.R.8.6;10.5] В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A - B = \underbrace{1\ldots1}_{n}$. Найдите наименьшее возможное значение n.

1.6.7. [Mos — 2015.8.3] Миша заметил, что на электронном табло, показывающем курс доллара к рублю (4 цифры, разделенные десятичной запятой), горят те же самые четыре различные цифры, что и месяц назад, но в другом порядке. При этом курс вырос ровно на 20%. Приведите пример того, как такое могло произойти.

1.6.8. [Mos — 2015.11.2] В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырёхзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

1.6.9. [Vse — 2005.R.8.3;9.2] Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное 11?

1.6.10. [Vse — 1993.R.9.2;10.2] Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычёркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

1.6.11. [Eul — 2014.F.6] Назовём натуральное число *гористым*, если в его записи есть не стоящая с краю цифра (называемая *вершиной*), которая больше всех остальных, а все остальные цифры ненулевые и сначала нестрого возрастают (то есть каждая следующая цифра больше предыдущей или равна ей) до вершины, а потом нестрого убывают (то есть каждая следующая цифра меньше предыдущей или равна ей). Например, число 12243 — гористое, а числа 3456 и 1312 — нет. Докажите, что сумма всех *стозначных* гористых чисел — составное число.

1.6.12. [Vse — 1998.R.9.3] Назовем десятизначное число *интересным*, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

1.6.13. [Vse — 2003.R.9.4] Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, кратное 11. Кто из игроков победит при правильной игре?

1.6.14. [Vse — 1995.F.9.5] Назовём натуральные числа *похожими*, если они записываются с помощью одного и того же набора цифр (например, для набора цифр 1, 1, 2 похожими будут числа 112, 121, 211). Докажите, что существуют такие три похожих 1995-значных числа, в записи которых нет нулей, что сумма двух из них равна третьему.

1.6.15. [Vse — 1996.F.9.5] Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10.

1.7 Сумма цифр числа

1.7.1. [Mpr — 1993.6.4] Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это ещё два раза, то получится ещё три числа. Найдите самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

1.7.2. [Eul — 2011.F.5] 100 идущих подряд натуральных чисел отсортировали по возрастанию суммы цифр, а числа с одинаковой суммой цифр — просто по возрастанию. Могли ли числа 2010 и 2011 оказаться рядом?

1.7.3. [Mos — 1993.8.1] Обозначим через $S(x)$ сумму цифр натурального числа x. Решить уравнения:
а) $x + S(x) + S(S(x)) = 1993$;
б) $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 1993$.

1.7.4. [Vse — 2005.R.8.5;9.5] Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N чётно.

1.7.5. [Mos — 2002.8.2] Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A.

1.7.6. [Mos — 1976.7.3;8.1] Существует ли такое натуральное число n, что сумма цифр числа n^2 равна 100?

1.7.7. [Vse — 2001.R.8.6] Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ делится на сумму своих цифр. (Например, $n = 60398$ — хорошее.) Обязательно ли предпоследней цифрой хорошего числа, оканчивающегося восьмёркой, будет девятка?

1.7.8. [Eul — 2018.F.1] Петя загадал натуральное число N, Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа $N+1$, затем сумму цифр числа $N+2$ и т. д. Верно ли, что рано или поздно умный Вася сможет с гарантией установить Петино число?

1.7.9. [Vse — 1999.F.9.1] В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$?

1.8 Простые числа

1.8.1. [Mos — 2013.8.1] Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от 1 до 9. Сумма этих простых чисел оказалась равной 225. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

1.8.2. [Vse — 2006.R.8.1;9.1] Найдите какое-нибудь такое девятизначное число N, состоящее из различных цифр, что среди всех чисел, получающихся из N вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого.

1.8.3. [Vse — 1995.R.9.5] Найдите все такие простые числа p, что число $p^2 + 11$ имеет ровно шесть различных делителей (включая единицу и само число).

1.8.4. [Vse — 2015.R.9.2] Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

1.8.5. [Vse — 1993.F.9.1;11.1] Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым?

1.8.6. [Eul — 2014.F.1] Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители входит не больше 23 различных простых чисел.

1.8.7. [Eul — 2010.F.1] Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$ Может ли среднее арифметическое $(p_1 + \ldots + p_n)/n$ при каком-нибудь $n \geqslant 2$ быть простым числом?

1.8.8. [Vse — 2018.F.9.1] Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а p_1, p_2, p_3, $\ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа a_1, a_2, $\ldots$ простые.

1.8.9. [Vse — 2007.R.8.3;9.2] Существуют ли такие простые числа p_1, p_2, $\ldots$, p_{2007}, что $p_1^2 - 1$ делится на p_2, $p_2^2 - 1$ делится на p_3, $\ldots$, $p_{2007}^2 - 1$ делится на p_1?

1.8.10. [Vse — 2014.F.9.5;10.5] К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

1.8.11. [Vse — 2007.F.8.7] Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (*n-вопросиал*) произведение всех простых чисел, меньших n. Решите уравнение $n? = 2n + 16$.

1.8.12. [Eul — 2012.R.4] *Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом a разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

1.8.13. [Eul — 2014.R.8] Дано 2014 попарно различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть равно произведению шести попарно различных простых чисел.

1.8.14. [Eul — 2018.R.10] Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

1.8.15. [Eul — 2013.F.7] На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из исходных чисел больше, чем $\frac{n^k}{p_1 p_2 \ldots p_k}$, где p_1, p_2, $\ldots$, p_k — все простые числа, меньшие n.

1.8.16. [Eul — 2017.F.8] Дано нечётное натуральное число a, большее 100. На доску выписали все натуральные числа вида $(a - n^2)/4$, где n — натуральное число. Оказалось, что при $n \leqslant \sqrt{a/5}$ все они простые. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску натуральных чисел простое или равно единице.

1.9 Основная теорема арифметики

1.9.1. [Vse — 2003.R.8.1] Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

1.9.2. [Vse — 1996.R.9.5;10.5] Найдите все натуральные числа, имеющие ровно шесть делителей, сумма которых равна 3500.

1.9.3. [Vse — 1995.R.9.2] Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

1.9.4. [Vse — 2001.R.9.6] Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль?

1.9.5. [Eul — 2010.R.4] Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

1.9.6. [Eul — 2011.F.7] По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечётными знаменателями, большими 10^{10}. Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?

1.10 НОД и НОК

1.10.1. [Vse — 2003.R.8.6] Для некоторых натуральных чисел a, b, c и d выполняются равенства

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}\,.$$

Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

1.10.2. [Eul — 2014.R.3], [Vse — 2014.R.9.3] Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?

1.10.3. [Eul — 2009.F.5] Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*, *, *) - \text{НОК}(*, *, *) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

1.10.4. [Vse — 2009.F.9.1] Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

1.10.5. [Eul — 2016.R.4] Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

1.10.6. [Vse — 2016.R.9.3] Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

1.10.7. [Mos — 2000.11.1] Наибольший общий делитель натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД$(m + 2000n, n + 2000m)$?

1.11 Остатки и сравнения

Определение. Разделить целое число a на целое число $b \neq 0$ с остатком — это значит представить число a в виде $a = kb + r$, где $0 \leqslant r < |b|$. При этом k называется частным, а r — остатком от деления a на b.

1.11.1. Найдите все возможные остатки от деления квадрата целого числа:

а) на 3; б) на 4; в) на 5.

Объясните, почему число $100\ldots04$ не может быть квадратом целого числа.

Определение. Запись $a \equiv b \pmod m$ означает, что числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m. Читается так: a сравнимо с b по модулю m.

1.11.2. Докажите, что $a \equiv b \pmod m$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

1.11.3. (*Свойства сравнений*) Пусть $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$. Докажите, что:

- $a + c \equiv b + d \pmod m$ — сравнения по одному и тому же модулю можно складывать друг с другом;
- $ac \equiv bd \pmod m$ — сравнения по одному и тому же модулю можно умножать друг на друга;
- $a^n \equiv b^n \pmod m$, $n \in \mathbb{N}$ — сравнение можно возвести в любую натуральную степень;
- $ka \equiv kb \pmod m$, $k \in \mathbb{Z}$ — сравнение можно умножить на любое целое число.

1.11.4. Найдите остаток от деления: а) 5^{20} на 24; б) 3^{66} на 28.

1.11.5. Докажите, что $16^{2014} + 33^{2015}$ делится на 17.

1.11.6. При каких натуральных n число $2^n - 1$ делится на 7?

1.11.7. Докажите, что при любом натуральном n число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.

1.11.8. Докажите, что:

а) $\overline{a_1a_2\ldots a_n} \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod 9$;

б) $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}a_1 \pmod{11}$.

Выведите отсюда признаки деления на 9 и 11.

1.11.9. [Mos — 2013.8.3] На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

1.11.10. [Mos — 1999.8.4] Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

1.11.11. [Mos — 2015.8.4] Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

1.11.12. [Eul — 2017.F.5] Некоторое натуральное число a разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99?

1.11.13. [Vse — 1997.R.8.7] Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

1.11.14. [Vse — 2014.R.9.1] Даны 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

1.11.15. [Vse — 2002.R.9.5] Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 60 в таком порядке, чтобы сумма каждых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, …, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7?

1.11.16. [Vse — 2008.R.9.5] Дано натуральное число $n > 1$. Для каждого делителя d числа $n+1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь — остаток. Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

1.11.17. [Mos — 2005.9.2] Существуют ли 2005 таких различных натуральных чисел, что сумма любых 2004 из них делится на оставшееся число?

1.11.18. [Vse — 2014.F.9.1] По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что каждые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

1.11.19. [Vse — 1993.F.9.5;10.5] Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27.

1.11.20. [Vse — 2011.F.9.5] Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 1005$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

1.11.21. [Vse — 2012.F.9.1] Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равняться 2012?

1.11.22. [Vse — 2018.F.9.6;10.6] Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

1.12 Произведения и факториалы

1.12.1. [Mpr — 1996.7.6] Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

1.12.2. [Vse — 2017.R.9.1] В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?

1.12.3. [Vse — 2017.R.10.1] В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз?

1.12.4. [Mos — 2016.8.1;10.1] Можно ли число 1/10 представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей?

1.12.5. [Mos — 2014.8.3] Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

1.12.6. [Vse — 2008.F.9.1;10.1] Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

1.13 Уравнения в целых числах

1.13.1. [Mos — 1998.8.1] Найдутся ли натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие условию

$$28x + 30y + 31z = 365\,?$$

1.13.2. [Mos — 2005.8.1] Найти хотя бы одно целочисленное решение уравнения

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005.$$

1.13.3. [Mos — 1973.8.4] Рассматриваются решения уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} \quad (p > 1),$$

где x, y и p — натуральные числа (решением называется пара натуральных чисел x и y, обращающая это уравнение в верное равенство). Докажите, что если p — простое число, то уравнение имеет ровно три решения; если p — составное, то решений больше трёх ($x = a$, $y = b$ и $x = b$, $y = a$ — различные решения, если $a \neq b$).

1.13.4. [Mos — 1983.7.1] Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

1.13.5. [Mos — 1978.7.1] Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$3 \cdot 2^x + 1 = y^2.$$

1.13.6. [Mos — 1955.7.1] Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

1.13.7. [Vse — 1999.R.8.5] Докажите, что числа от 1 до 15 нельзя разбить на две группы: A из 2 чисел и B из 13 чисел так, чтобы сумма чисел в группе B была равна произведению чисел в группе A.

1.13.8. [Mos — 1997.8.2] От вулканостанции до вершины вулкана Стромболи надо идти 4 часа по дороге, а затем — 4 часа по тропинке. На вершине расположено два кратера. Первый кратер 1 час извергается, потом 17 часов молчит, потом опять 1 час извергается, и т. д. Второй кратер 1 час извергается, 9 часов молчит, 1 час извергается, и т. д. Во время извержения первого кратера опасно идти и по тропинке, и по дороге, а во время извержения второго опасна только тропинка. Ваня увидел, что ровно в 12 часов оба кратера начали извергаться одновременно. Сможет ли он когда-нибудь подняться на вершину вулкана и вернуться назад, не рискуя жизнью?

1.13.9. [Eul — 2011.F.1] Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что

$$a + b = c + d = ab - cd = 4n.$$

1.13.10. [Vse — 1996.R.8.7] Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) сумму этих чисел на их произведение. После этого Незнайка стёр самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался в 3 раза больше первого. Какое число Незнайка стёр?

1.13.11. [Vse — 1993.R.9.5;10.5] Докажите, что уравнение

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$

не имеет решений в целых числах.

1.13.12. [Mos — 1994.9.3] Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

имеет бесконечное число решений в целых числах x, y, z.

1.13.13. [Mos — 2002.9.4] Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

1.13.14. [Vse — 2005.R.8.7] Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что

$$x + y = a^n, \quad x^2 + y^2 = a^m$$

для некоторых натуральных a, n, m.

1.14 Рациональные и иррациональные числа

1.14.1. [Eul — 2012.R.5] Существуют ли 10 различных рациональных чисел таких, что произведение любых двух из них — целое число, а произведение любых трёх — нет? Напомним, что рациональным называется число, равное отношению двух целых чисел.

1.14.2. [Vse — 2000.R.8.1] Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2(a^2b^2+4)=2(a^6+b^6).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.

1.14.3. [Vse — 2014.R.11.5] Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

1.14.4. [Vse — 2014.R.9.5] Число x таково, что среди четырёх чисел

$$x-\sqrt{2}\,,\quad x-\frac{1}{x}\,,\quad x+\frac{1}{x}\,,\quad x^2+2\sqrt{2}$$

ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

1.14.5. [Vse — 2017.R.9.5] Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

1.14.6. [Vse — 2017.R.10.5] Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

1.14.7. [Vse — 2003.F.9.1] Числовое множество M, содержащее 2003 различных числа, таково, что для каждых двух различных элементов a, b из M число $a^2+b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.

1.15 Числовые неравенства

1.15.1. [Mos — 1999.8.1] Сравнив дроби

$$x=\frac{111110}{111111}\,,\quad y=\frac{222221}{222223}\,,\quad z=\frac{333331}{333334}\,,$$

расположите их в порядке возрастания.

1.15.2. [Mos — 2007.8.2] Дано натуральное число N. Для того чтобы найти целое число, ближайшее к $\sqrt{N}$, воспользуемся следующим способом: найдём среди квадратов натуральных чисел число a^2, ближайшее к числу N; тогда a и будет искомым числом. Обязательно ли этот способ даст правильный ответ?

1.15.3. [Mos — 2011.9.1] Что больше: $2011^{2011}+2009^{2009}$ или $2011^{2009}+2009^{2011}$?

1.16 Средние величины

1.16.1. [Mos — 2008.9.1] Две команды КВН участвуют в игре из четырёх конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку — целое число от 1 до 5; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырёх полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей?

1.16.2. [Vse — 1999.R.8.4] Имеется 40 одинаковых газовых баллонов, значения давления газа в которых нам неизвестны и могут быть различны. Разрешается соединять любые баллоны друг с другом в количестве, не превосходящем заданного натурального числа k, а затем разъединять их; при этом давление газа в соединяемых баллонах устанавливается равным среднему арифметическому давлений в них до соединения. При каком наименьшем k существует способ уравнивания давлений во всех 40 баллонах независимо от первоначального распределения давлений в баллонах?

Глава 2

Методы рассуждений

2.1 Доказательство от противного

2.1.1. [Eul — 2014.R.1] Ученик за одну неделю получил 13 оценок (из набора 2, 3, 4, 5), среднее арифметическое которых — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

2.1.2. [Vse — 2017.F.9.5] На доске написаны $n > 3$ различных натуральных чисел, меньших, чем $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$. Для каждой пары этих чисел Серёжа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он бы получил $100 = 14 \cdot 7 + 2$ и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных.

2.1.3. [Vse — 2017.F.9.3] Сто гномов, веса которых равны $1, 2, 3, \ldots, 100$ фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъёмностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег?

2.2 Разбиения на пары и группы

2.2.1. [Mos — 1993.8.4] Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого? (Стрелки часов движутся с постоянной скоростью.)

2.2.2. [Mos — 1994.8.5] Придворный астролог называет момент времени хорошим, если часовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата (стрелки вращаются на общей оси и не делают скачков). Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

2.2.3. [Mos — 1992.8.4] Каково наименьшее число гирь в наборе, который можно разложить и на 3, и на 4, и на 5 кучек равной массы?

2.3 Отношение порядка и сортировка

2.3.1. [Vse — 2004.R.8.5] Может ли в наборе из шести чисел a, b, c, a^2/b, b^2/c, c^2/a, где a, b, c — положительные числа, оказаться ровно три различных числа?

2.3.2. [Vse — 1997.R.8.2;9.3] а) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

2.3.3. [Mos — 1998.8.4] Некоторые из чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{200} написаны синим карандашом, а остальные — красным. Если стереть все красные числа, то останутся все натуральные числа от 1 до 100, записанные в порядке возрастания. Если же стереть все синие числа, то останутся все натуральные числа от 100 до 1, записанные в порядке убывания. Докажите, что среди чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} содержатся все натуральные числа от 1 до 100 включительно.

2.3.4. [Mos — 2012.9.1] В стране Далёкой провинция называется крупной, если в ней живёт более 7% жителей этой страны. Известно, что для каждой крупной провинции найдутся такие две провинции с меньшим населением , что их суммарное население больше, чем у этой крупной провинции. Какое наименьшее число провинций может быть в стране Далёкой?

2.3.5. [Mos — 2012.9.2] В ряд лежит чётное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более чем на 1 г.

2.3.6. [Mos — 1997.9.2] На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

2.3.7. [Vse — 2003.R.8.8] Набор из 2003 положительных чисел таков, что для любых двух входящих в него чисел a и b $(a > b)$ хотя бы одно из чисел $a + b$ или $a - b$ тоже входит в набор. Докажите, что если данные числа упорядочить по возрастанию, то разности между соседними числами окажутся одинаковыми.

2.4 Оценка плюс пример

2.4.1. [Eul — 2016.R.1] Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число *хорошим*, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных?

2.4.2. [Vse — 2003.R.8.5] В вершинах кубика написали числа от 1 до 8, а на каждом ребре — модуль разности чисел, стоящих в его концах. Какое наименьшее количество различных чисел может быть написано на рёбрах?

2.4.3. [Eul — 2015.R.2] Разрешается вырезать из шахматной доски размером 20×20 любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.

2.4.4. [Eul — 2012.R.6] По кругу выложены чёрные и белые шары, причем чёрных в два раза больше, чем белых. Известно, что среди пар соседних шаров одноцветных пар втрое больше, чем разноцветных. Какое наименьшее число шаров могло быть выложено?

2.4.5. [Eul — 2015.R.6] После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?

2.4.6. [Vse — 2001.R.8.2] N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. *Изображённым* назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырёхзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди изображённых?

2.4.7. [Mos — 2017.8.3] По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стёрли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально?

2.4.8. [Eul — 2009.F.1] У реки живёт племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч пошёл к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо. Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение?

2.4.9. [Eul — 2017.R.7] Имеется клетчатая доска размером $2n \times 2n$. Петя поставил на неё $(n+1)^2$ фишек. Кот может одним взмахом лапы смахнуть на пол любую одну фишку или две фишки, стоящие в соседних по стороне или углу клетках. За какое наименьшее количество взмахов кот заведомо сможет смахнуть на пол все поставленные Петей фишки?

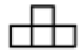
2.4.10. [Eul — 2014.R.7] На клетчатой доске размером 2014×2014 закрашено несколько (не меньше одной) клеток так, что в каждом квадратике размером 3×3 клетки закрашено чётное число клеток. Каково наименьшее возможное число закрашенных клеток?

2.4.11. [Eul — 2011.R.7] Для четырёх различных целых чисел подсчитали все их попарные суммы и попарные произведения. Полученные суммы и произведения выписали на доску. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться на доске?

2.4.12. [Eul — 2010.R.7] При каком наибольшем n можно раскрасить числа $1, 2, \ldots, 14$ в красный и синий цвета так, чтобы для любого числа $k = 1, 2, \ldots, n$ нашлись пара синих чисел, разность между которыми равна k, и пара красных чисел, разность между которыми тоже равна k?

2.4.13. [Eul — 2009.R.3] По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 10 в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

2.4.14. [Eul — 2018.R.9] На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2?

2.4.15. [Eul — 2013.R.8] В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения четырёхклеточной фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

2.4.16. [Eul — 2018.F.2] Найдите наименьшее натуральное k такое, что для некоторого натурального числа a, большего 500 000, и некоторого натурального числа b выполнено равенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+k} = \frac{1}{b}\,.$$

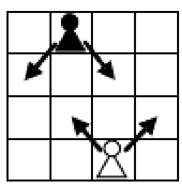
2.4.17. [Eul — 2014.F.7] Десятичная запись натурального числа N составлена только из единиц и двоек. Известно, что вычёркиванием цифр из этого числа можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее возможное количество цифр в записи числа N.

2.4.18. [Eul — 2018.F.4] В вершинах правильного 300-угольника расставлены числа от 1 до 300 по одному разу в некотором порядке. Оказалось, что для каждого числа a среди ближайших к нему 15 чисел по часовой стрелке столько же меньших a, сколько и среди 15 ближайших к нему чисел против часовой стрелки. Число, которое больше всех 30 ближайших к нему чисел, назовём *огромным*. Каково наименьшее возможное количество огромных чисел?

2.4.19. [Eul — 2015.F.4] На каждой стороне квадрата выбрано по 100 точек, из каждой выбранной точки внутрь квадрата проведён отрезок, перпендикулярный соответствующей стороне квадрата. Оказалось, что никакие два из проведённых отрезков не лежат на одной прямой. Отметим все точки пересечения этих отрезков. При каком наибольшем $k < 200$ может случиться так, что на каждом проведённом отрезке лежит ровно k отмеченных точек?

2.4.20. [Eul — 2010.F.4] В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

2.4.21. [Eul — 2011.F.8] Какое наибольшее количество белых и чёрных пешек можно расставить на клетчатой доске 9×9 (пешку, независимо от её цвета, можно ставить на любую клетку доски) так, чтобы никакая не била никакую (в том числе и своего цвета)? Белая пешка бьёт две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с бо́льшим номером, а чёрная — две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с меньшим номером (см. рисунок).



2.5 Принцип крайнего

2.5.1. [Vse — 1997.R.8.1] Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

2.5.2. [Vse — 2003.R.9.6;11.6] На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно один знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, $\ldots$, 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

2.6 Инварианты

2.6.1. [Mos — 1999.9.1] На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня. (Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\dfrac{a+b}{2}$, а средним гармоническим — число $\dfrac{2}{1/a+1/b}$.)

2.6.2. [Vse — 2002.R.8.5] Написанное на доске четырёхзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

2.6.3. [Mos — 1995.8.5] Несколько населённых пунктов соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех населённых пунктов. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

2.6.4. [Vse — 2018.R.9.7] Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причём фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов?

2.7 Полуинварианты

2.7.1. [Mos — 2002.9.1] Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

2.7.2. [Mos — 2000.8.5] В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

2.7.3. [Vse — 1998.R.8.3] В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

2.7.4. [Eul — 2017.R.8] На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечётных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1\cdot2+1\cdot3+1\cdot3+2\cdot3+2\cdot3+3\cdot3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{10000000}$?

2.8 Логические задачи

2.8.1. [Eul — 2013.R.1] Каждый из 10 гномов — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда врёт, причём хотя бы один из гномов — рыцарь. Все гномы выстроились в шеренгу, после чего девятеро сказали: «Среди стоящих слева от меня есть рыцарь», а оставшийся, Глоин, сказал: «Среди стоящих справа от меня есть рыцарь». Правду сказал Глоин или солгал?

2.8.2. [Eul — 2011.R.1] На доске нарисованы три четырёхугольника. Петя сказал: «На доске нарисованы по крайней мере две трапеции». Вася сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два прямоугольника». Коля сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два ромба». Известно, что один из мальчиков сказал неправду, а двое других — правду. Докажите, что среди нарисованных на доске четырёхугольников есть квадрат. (Напомним, что трапеция — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет.)

2.8.3. [Eul — 2017.R.5] На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек?

2.8.4. [Mos — 2016.8.2] За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Двое из них заявили: «Оба моих соседа — лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

2.8.5. [Eul — 2018.R.3] По кругу сидят 100 человек. Некоторые из них — рыцари, всегда говорящие правду, остальные — лжецы, которые всегда лгут. Для некоторого натурального числа $k < 100$ каждый из сидящих произнёс фразу: «Следующие k людей, сидящих за мной по часовой стрелке — лжецы». Чему могло быть равно число k?

2.8.6. [Eul — 2016.F.1] В одной деревне живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник каждому жителю деревни задал два вопроса: «Сколько в деревне рыцарей?» и «На сколько отличаются количества рыцарей и лжецов?» Путешественник знает, что в деревне есть хотя бы один рыцарь. Всегда ли по полученным ответам путешественник сможет узнать, кто из жителей деревни рыцарь, а кто — лжец?

2.8.7. [Eul — 2013.F.1] 200 человек стоят по кругу. Каждый из них либо лжец, либо конформист. Лжец всегда лжёт. Конформист, рядом с которым стоят два конформиста, всегда говорит правду. Конформист, рядом с которым стоит хотя бы один лжец, может как говорить правду, так и лгать. 100 из стоящих сказали: «Я — лжец», 100 других сказали: «Я — конформист». Найдите наибольшее возможное число конформистов среди этих 200 человек.

2.8.8. [Mos — 1998.9.2] Путешественник посетил деревню, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Жители деревни стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли он. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей деревни составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

2.8.9. [Eul — 2018.F.6] Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10.) Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

2.8.10. [Vse — 1998.R.8.8] На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается хорошим, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и нехорошим в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется нехорошим.

2.8.11. [Vse — 2001.F.9.5] Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трёхкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трёхкопеечных монет?

Глава 3

Текстовые задачи

3.1 Движение

3.1.1. [Mos — 2015.8.1] Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты — ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

3.1.2. [Vse — 2004.R.8.1] По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили «Ауди» и БМВ. Оказалось, что как в 17:00, так и в 18:00 БМВ находился в два раза дальше от перекрестка, чем «Ауди». В какое время «Ауди» мог проехать перекресток?

3.1.3. [Eul — 2017.R.1] 10 бегунов стартуют одновременно: пятеро в синих майках с одного конца беговой дорожки, пятеро в красных майках — с другого. Их скорости постоянны и различны, причём скорость каждого бегуна больше 9 км/ч, но меньше 12 км/ч. Добежав до конца дорожки, каждый бегун сразу бежит назад, а, вернувшись к месту своего старта, заканчивает бег. Тренер ставит в блокноте галочку каждый раз, когда встречаются (лицом к лицу или один догоняет другого) двое бегунов в разноцветных майках (больше двух бегунов в одной точке за время бега не встречались). Сколько галочек поставит тренер к моменту, когда закончит бег самый быстрый из бегунов?

3.1.4. [Eul — 2016.R.5] Три спортсмена пробежали дистанцию в 3 километра. Первый километр они бежали с постоянными скоростями v_1, v_2 и v_3 соответственно, такими, что $v_1 > v_2 > v_3$. После отметки в 1 километр каждый из них изменил скорость: первый — с v_1 на v_2, второй — с v_2 на v_3, а третий — с v_3 на v_1. Кто из спортсменов пришел к финишу последним?

3.1.5. [Eul — 2011.R.5] Бизнесмен Борис Михайлович решил устроить с трактористом Васей гонки по шоссе. Поскольку его «Лексус» едет вдесятеро быстрее Васиного трактора, он дал Васе фору и выехал через час после Васи. После того, как Васин трактор проехал ровно половину запланированной трассы, у него отвалилась рессора, поэтому оставшуюся часть пути Вася проехал вдвое медленнее, чем первую. В результате встречи с Васиной рессорой Борису Михайловичу пришлось заехать в оказавшийся рядом сервис на 4 часа, после чего он продолжил путь вдвое медленнее, чем раньше. Докажите, что в результате он отстал от Васи не менее чем на час.

3.1.6. [Eul — 2010.R.1] Однажды барон Мюнхгаузен, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половину времени, затраченного на прогулку — со скоростью 6 км/ч. Не ошибся ли барон?

3.1.7. [Vse — 2005.R.8.1] В 12 часов дня «Запорожец» и «Москвич» находились на расстоянии 90 км и начали двигаться навстречу друг другу с постоянной скоростью. Через два часа они снова оказались на расстоянии 90 км. Незнайка утверждает, что «Запорожец» до встречи с «Москвичом» и «Москвич» после встречи с «Запорожцем» проехали в сумме 60 км. Докажите, что он неправ.

3.1.8. [Vse — 2003.R.8.2;9.2] По каждой из двух пересекающихся прямых с постоянными скоростями, не меняя направления, ползёт по жуку. Известно, что проекции жуков на ось OX никогда не совпадают (ни в прошлом, ни в будущем). Докажите, что проекции жуков на ось OY обязательно совпадут или совпадали раньше.

3.1.9. [Vse — 2000.R.8.6] Путь от платформы A до платформы B электропоезд прошёл за X минут ($0 < X < 60$). Найдите X, если известно, что как в момент отправления от A, так и в момент прибытия в B угол между часовой и минутной стрелками равнялся X градусам.

3.1.10. [Mos — 2010.8.4] Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

3.1.11. [Vse — 2006.R.8.3] В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для каждых трёх машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все четыре машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

3.1.12. [Vse — 2002.R.8.7] По шоссе мимо наблюдателя проехали «Москвич», «Запорожец» и двигавшаяся им навстречу «Нива». Известно, что когда с наблюдателем поравнялся «Москвич», то он был равноудален от «Запорожца» и «Нивы», а когда с наблюдателем поравнялась «Нива», то она была равноудалена от «Москвича» и «Запорожца». Докажите, что «Запорожец» в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от «Нивы» и «Москвича». (Скорости автомашин считаем постоянными. В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.)

Малые шевеления

3.1.13. [Mos — 1952.8.4] Два человека A и B должны попасть как можно скорее из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/ч. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/ч. A отправляется в путь пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N в M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N. Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы время, затраченное A и B на дорогу в N, было наименьшим? (C идёт пешком с той же скоростью, что A и B; время, затраченное на дорогу, считается от момента выхода A и B из M до момента прибытия последнего из них в N.)

3.1.14. [Vse — 1999.R.8.1] Отец с двумя сыновьями отправились навестить бабушку, которая живёт в 33 км от города. У отца есть мотороллер, скорость которого 25 км/ч, а с пассажиром — 20 км/ч (двух пассажиров на мотороллере перевозить нельзя). Каждый из братьев идёт по дороге со скоростью 5 км/ч. Докажите, что все трое могут добраться до бабушки за 3 часа.

3.1.15. [Vse — 2007.F.8.5] От Майкопа до Белореченска 24 км. Три друга должны добраться: двое из Майкопа в Белореченск, а третий — из Белореченска в Майкоп. У них есть один велосипед, первоначально находящийся в Майкопе. Каждый из друзей может идти (со скоростью не более 6 км/ч) и ехать на велосипеде (со скоростью не более 18 км/ч). Оставлять велосипед без присмотра нельзя. Докажите, что через 2 часа 40 минут все трое друзей могут оказаться в пунктах назначения. Ехать на велосипеде вдвоём нельзя.

3.1.16. [*МОШ по физике, 2016, 9*] Группа из трёх туристов должна перебраться из пункта A в пункт B по дороге длиной $S = 45$ км. Стартуют все туристы одновременно. На всю группу туристов есть только два велосипеда, причем если на велосипеде едут двое, то их скорость равна $3V$, а если на велосипеде едет один человек, то его скорость равна $4V$. Если же турист идет пешком, то его скорость движения равна $V = 5$ км/ч. За какое минимальное время все туристы могут оказаться в пункте назначения? Временем посадки туристов на велосипед, а также временами разгона и торможения можно пренебречь.

3.2 Проценты и отношения

3.2.1. [Mos — 1995.8.1] М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?

3.2.2. [Mos — 2003.8.1] В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — на 15%, если же зарплату удвоят папе — на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

3.2.3. [Mos — 2007.8.1] За первый год население некоторой деревни возросло на n человек, а за второй — на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй — на n%. Сколько жителей стало в деревне?

3.2.4. [Mos — 2009.8.1] На доске написано:

В этом предложении … процентов цифр делятся на 2, … процентов цифр делятся на 3, а … процентов цифр делятся и на 2 и на 3.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

3.2.5. [Mos — 2002.8.1] На острове 2/3 всех мужчин женаты и 3/5 всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

3.2.6. [Vse — 2001.R.8.1;9.1] Можно ли числа 1, 2, …, 10 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов?

3.2.7. [Mos — 2000.8.2] В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов. После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т. п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом Партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить?

3.2.8. [Mos — 2001.9.2] В некоторой стране суммарная зарплата 10% самых высокооплачиваемых работников составляет 90% зарплаты всех работников. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится эта страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

3.3 Работа

3.3.1. [Vse — 1994.R.9.1] Как-то Кролик торопился на встречу с осликом Иа-Иа, но к нему неожиданно пришли Винни-Пух и Пятачок. Будучи хорошо воспитанным, Кролик предложил гостям подкрепиться. Пух завязал салфеткой рот Пятачку и в одиночку съел 10 горшков мёда и 22 банки сгущённого молока, причём горшок мёда он съедал за 2 минуты, а банку молока — за минуту. Узнав, что больше ничего сладкого в доме нет, Пух попрощался и увёл Пятачка. Кролик с огорчением подумал, что он бы не опоздал на встречу с осликом, если бы Пух поделился с Пятачком. Зная, что Пятачок съедает горшок мёда за 5 минут, а банку молока — за 3 минуты, Кролик вычислил наименьшее время, за которое гости смогли бы уничтожить его запасы. Чему равно это время? (Банку молока и горшок мёда можно делить на любые части.)

3.4 Смеси и концентрации

3.4.1. [Mos — 1994.8.1] Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

3.5 Неравенства и разбор случаев

3.5.1. [Mos — 2006.8.1] В олимпиаде участвовали 2006 школьников. Оказалось, что школьник Вася из всех шести задач решил только одну, а число участников, решивших

— хотя бы 1 задачу, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 2;
— хотя бы 2 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 3;
— хотя бы 3 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 4;
— хотя бы 4 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 5;
— хотя бы 5 задач, в 4 раза больше, чем решивших все 6.

Сколько школьников не решили ни одной задачи?

3.5.2. [Mos — 2010.9.1] Съев на пустой желудок трёх поросят и семерых козлят, Серый Волк всё ещё страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок 7 поросят и козлёнка и страдал уже от обжорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок 11 козлят?

3.5.3. [Vse — 1995.F.9.1] Товарный поезд, отправившись из Москвы в x часов y минут, прибыл в Саратов в y часов z минут. Время в пути составило z часов x минут. Найдите все возможные значения x.

3.5.4. [Vse — 2005.R.8.8;9.8] а) В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

б) В 100 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 34 ящика, что в них окажется не менее трети всех яблок и не менее трети всех апельсинов.

3.5.5. [Vse — 1997.R.8.8;9.8;10.6] а) В городе Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются два дня недели, в которые она не может выезжать на улицы города. Семье требуется каждый день иметь в распоряжении не менее 10 машин. Каким наименьшим количеством машин может обойтись семья, если её члены могут сами выбирать запрещенные дни для своих автомобилей?

б) В Мехико для каждой частной автомашины устанавливается один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из 10 человек подкупила полицию, и для каждой машины они называют 2 дня, один из которых полиция выбирает в качестве невыездного дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение невыездных дней для автомобилей идет последовательно?

3.6 Ограничения

3.6.1. [Mos — 1995.8.4] Достаточно ли для изготовления закрытой со всех сторон прямоугольной коробки, вмещающей не менее 1995 единичных кубиков, а) 962; б) 960; в) 958 квадратных единиц материала?

3.6.2. [Mos — 2008.8.4] Турнир, в котором участвовало 20 спортсменов, судили 10 арбитров. Каждый сыграл с каждым один раз, и каждую встречу судил ровно один арбитр. После окончания каждой игры оба участника фотографировались с арбитром. Через год после турнира была найдена стопка из всех этих фотографий. Оказалось, что не про каждого можно определить, кем он является – спортсменом или арбитром. Сколько могло быть таких людей?

3.6.3. [Vse — 1996.F.9.1] Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1000000 включительно: представимых в виде суммы точного квадрата и точного куба или не представимых в таком виде?

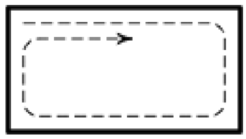
Глава 4

Алгоритмы, процессы, игры

4.1 Алгоритмы и операции

4.1.1. [Eul — 2009.R.1] Гриб называется *плохим*, если в нём не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

4.1.2. [Mos — 2001.8.1] На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шириной 200 и высотой 100 клеток. Его закрашивают по клеткам, начав с левой верхней и идя по спирали (дойдя до края или уже закрашенной части, поворачивают направо, см. рис.). Какая клетка будет закрашена последней? (Укажите номер её строки и столбца. Например, нижняя правая клетка стоит в 100-й строке и 200-м столбце.)



4.1.3. [Eul — 2013.R.2] На пути в музей группа детсадовцев построилась парами, причём количество пар из двух мальчиков было в три раза больше количества пар из двух девочек. На обратном пути та же группа построилась так, что количество пар из двух мальчиков было в четыре раза больше количества пар из двух девочек. Докажите, что эту же группу можно построить так, чтобы количество пар из двух мальчиков было в семь раз больше количества пар из двух девочек.

4.1.4. [Eul — 2011.R.6] На доске написано число 1. Если на доске написано число a, его можно заменить любым числом вида $a + d$, где d взаимно просто с a и $10 \leqslant d \leqslant 20$. Можно ли через несколько таких операций получить на доске число $18! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 18$?

4.1.5. [Eul — 2010.R.2] Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

4.1.6. [Eul — 2010.R.6] В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

4.1.7. [Eul — 2018.R.7] В полдень Вася положил на стол 10 вырезанных из бумаги выпуклых десятиугольников. Затем он время от времени брал ножницы, разрезал по прямой один из лежащих на столе многоугольников на два и клал оба получившихся куска назад на стол. К полуночи Вася проделал такую операцию 51 раз. Докажите, что в полночь среди лежащих на столе многоугольников был треугольник или четырёхугольник.

4.1.8. [Mos — 2013.9.1] На круглом столе через равные промежутки лежат пирожные. Игорь ходит вокруг стола и съедает каждое третье встреченное пирожное (каждое пирожное может быть встречено несколько раз). Когда на столе не осталось пирожных, он заметил, что последним взял пирожное, которое встретил первым, и прошел ровно 7 кругов вокруг стола. Сколько было пирожных?

4.1.9. [Mos — 2001.8.3] Даны шесть слов: `ЗАНОЗА`, `ЗИПУНЫ`, `КАЗИНО`, `КЕФАЛЬ`, `ОТМЕЛЬ`, `ШЕЛЕСТ`. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую (например, за один шаг можно получить из слова `ЗАНОЗА` слово `ЗКНОЗА`. Какое наименьшее число шагов нужно, чтобы сделать все слова одинаковыми (допускаются бессмысленные)?

4.1.10. [Eul — 2014.F.5] Петя и Вася одновременно ввели в свои калькуляторы одно и то же не равное 0 целое число. После этого каждую минуту Петя либо прибавлял к своему числу 10, либо умножал его на 2014; одновременно Вася в первом случае вычитал из своего числа 10, а во втором — делил его на 2014. Могло ли оказаться, что через некоторое время числа у Пети и Васи снова стали равными?

4.1.11. [Eul — 2010.F.5] На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров?

4.1.12. [Eul — 2016.F.6] В школе 30 кружков, в каждом занимаются 40 детей. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 30$ обозначим через n_i количество детей, занимающихся ровно в i кружках. Докажите, что в этой же школе можно организовать 40 кружков с 30 детьми в каждом так, чтобы числа n_i для этих новых кружков были бы теми же самыми.

4.1.13. [Mos — 2018.8.4] Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьёт. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.

4.1.14. [Mos — 2018.8.5] В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a\,?\,b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!» и «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$.

4.1.15. [Mos — 1993.8.5] Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

Комментарий. Словом мы называем любую последовательность букв русского алфавита, не обязательно осмысленную; *подсловом* называется любой фрагмент слова. Например, АБВШГАБ — слово, а АБВ, Ш, ШГАБ — его подслова.

4.1.16. [Mos — 2017.8.5] Преподаватель выставил оценки по шкале от 0 до 100. В учебной части могут менять верхнюю границу шкалы на любое другое натуральное число, пересчитывая оценки пропорционально и округляя до целых. Нецелое число при округлении меняется до ближайшего целого; если дробная часть равна 0,5, направление округления учебная часть может выбирать любое, отдельно для каждой оценки. (Например, оценка 37 по шкале 100 после пересчёта в шкалу 40 перейдёт в $37 \cdot (40/100) = 14{,}8$ и будет округлена до 15.) Студенты Петя и Вася получили оценки a и b, отличные от 0 и 100. Докажите, что учебная часть может сделать несколько пересчётов так, чтобы у Пети стала оценка b, а у Васи — оценка a (пересчитываются одновременно обе оценки).

4.1.17. [Mos — 2016.8.6] Чётное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с чётным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов.

4.1.18. [Mos — 2015.8.6;10.4] Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет.

На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса).

Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

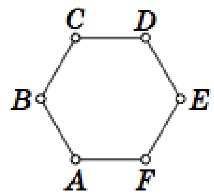
4.1.19. [Eul — 2013.F.8] 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?

4.1.20. [Vse — 2007.F.8.4] Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

4.2 Взвешивания

4.2.1. [Eul — 2013.R.5] У Синдбада в кошельке 11 внешне одинаковых динаров, среди которых, возможно, один фальшивый, отличающийся от настоящего по весу, но неизвестно в какую сторону. Как ему расплатиться с торговцем восемью настоящими динарами, если торговец разрешил два раза воспользоваться его чашечными весами, но без гирь?

4.2.2. [Mos — 2011.8.1] В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ (см. рисунок) лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A — массой 1 г, в B — 2 г, ..., в F — 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше. Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены?



4.2.3. [Vse — 2007.R.8.5;9.5] Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

4.2.4. [Vse — 2000.R.8.5] Даны 8 гирек весом 1, 2, ..., 8 граммов, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

4.2.5. [Eul — 2014.R.2] Эксперту предъявили 12 одинаковых на вид монет, среди которых, возможно, есть фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. У эксперта есть чашечные весы и эталонные монеты: 5 настоящих и 5 фальшивых. Сможет ли он за 4 взвешивания определить количество фальшивых монет среди предъявленных?

4.2.6. [Vse — 2004.R.8.2;9.1] Имеется набор гирь со следующими свойствами:
1) в нём есть 5 гирь, попарно различных по весу;
2) для любых двух гирь найдутся две другие гири того же суммарного веса.

Какое наименьшее число гирь может быть в этом наборе?

4.2.7. [Mos — 1996.8.2] По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравновесились.

4.2.8. [Mos — 2006.8.4] Девять одинаковых по виду монет расположены по кругу. Пять из них настоящие, а четыре — фальшивые. Никакие две фальшивые монеты не лежат рядом. Настоящие монеты весят одинаково, и фальшивые — одинаково (фальшивая монета тяжелее настоящей). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

4.2.9. [Eul — 2012.R.3] На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трёх результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Можно ли за 64 таких теста найти все фальшивые монеты?

4.2.10. [Eul — 2016.R.7] В ряд выложено 100 монет. Внешне все монеты одинаковы, но где-то среди них лежат подряд 50 фальшивых (а остальные — настоящие). Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые могут весить по-разному, но каждая фальшивая легче настоящей. Можно ли с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы 34 настоящие монеты?

4.2.11. [Eul — 2009.R.4] Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет (неважно, фальшивую или настоящую). Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

4.2.12. [Vse — 2006.R.8.8;9.7] При изготовлении партии из $N \geqslant 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

4.2.13. [Vse — 1996.R.8.8] Имеется 4 монеты, из которых 3 — настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжёлым грузом. Как за три взвешивания наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее остальных?

4.2.14. [Eul — 2014.F.4] Среди 49 одинаковых на вид монет — 25 настоящих и 24 фальшивых. Для определения фальшивых монет имеется тестер. В него можно положить любое количество монет, и если среди этих монет больше половины — фальшивые, тестер подает сигнал. Как за пять тестов найти две фальшивых монеты?

4.2.15. [Eul — 2017.F.4] У Зевса имеются весы, позволяющие узнавать вес положенного на них груза, и мешок со 100 монетами, среди которых есть 10- и 9-граммовые. Зевсу известно общее число N 10-граммовых монет в мешке, но не известно, какие именно сколько весят. Он хотел бы сделать четыре взвешивания на весах и в результате гарантированно найти хотя бы одну 9-граммовую монету. При каком наибольшем N это возможно?

4.2.16. [Eul — 2010.F.8] Среди 100 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

4.2.17. [Eul — 2012.F.8] Пусть n — натуральное число, большее 1. У Кости есть прибор, устроенный так, что если в него положить $2n+1$ различных по весу монет, то он укажет, какая из монет — средняя по весу среди положенных. Барон Мюнхгаузен дал Косте $4n+1$ различных по весу монет и про одну из них сказал, что она является средней по весу. Как Косте, использовав прибор не более $n+2$ раз, выяснить, прав ли барон?

4.2.18. [Mos — 1997.8.6] Банкир узнал, что среди одинаковых на вид монет одна — фальшивая (более лёгкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причем потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у банкира, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за n взвешиваний?

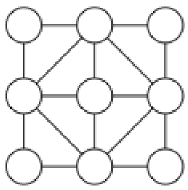
4.2.19. [Vse — 2002.R.8.8;9.8] Среди 18 деталей, выставленных в ряд, какие-то три подряд стоящие весят по 99 г, а все остальные — по 100 г. Двумя взвешиваниями на весах со стрелкой определите все 99-граммовые детали.

4.3 Переливания

4.3.1. [Eul — 2011.F.3] Имеются три литровых банки и мерка объемом 100 мл. Первая банка пуста, во второй — 700 мл сладкого чая, в третьей — 800 мл сладкого чая. При этом во второй банке растворено 50 г сахара, а в третьей — 60 г сахара. Разрешается набрать из любой банки полную мерку чая и перелить весь этот чай в любую другую банку. Можно ли несколькими такими переливаниями добиться, чтобы первая банка была пуста, а количество сахара во второй банке равнялось количеству сахара в третьей банке?

4.4 Таблицы

4.4.1. [Vse — 1998.R.8.5] Числа от 1 до 9 разместите в кружках фигуры (см. рис.) так, чтобы сумма четырёх чисел, находящихся в кружках-вершинах всех квадратов (их шесть), была постоянной.



4.4.2. [Vse — 2002.R.8.1] Можно ли все клетки таблицы 9×2002 заполнить натуральными числами так, чтобы суммы чисел в каждом столбце и суммы чисел в каждой строке были бы простыми числами?

4.4.3. [Mos — 2006.8.2] В клетках таблицы 3×3 расставлены числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна нулю. Какое наименьшее количество чисел, отличных от нуля, может быть в этой таблице, если известно, что оно нечётно?

4.4.4. [Eul — 2016.R.2] В каждой клетке таблицы 100×100 записано одно из чисел 1 или -1. Могло ли оказаться, что ровно в 99 строках суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 столбцах — положительны?

4.4.5. [Vse — 2007.F.8.2] В клетках таблицы 10×10 произвольно расставлены натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Докажите, что за 35 ходов можно добиться того, чтобы сумма каждых двух чисел, стоящих в клетках с общей стороной, была составной.

4.4.6. [Vse — 2006.R.9.2] В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

4.4.7. [Vse — 2004.R.8.4;9.3] В ячейки куба $11\times11\times11$ поставлены по одному числа $1, 2, \ldots, 1331$. Из одного углового кубика в противоположный угловой отправляются два червяка. Каждый из них может проползать в соседний по грани кубик, при этом первый может проползать, если число в соседнем кубике отличается на 8, второй — если отличается на 9. Существует ли такая расстановка чисел, что оба червяка смогут добраться до противоположного углового кубика?

4.4.8. [Eul — 2012.F.3] В каждую клетку таблицы 2012×2012 вписан либо нуль, либо единица, причем в каждом столбце и каждой строке есть как нули, так и единицы. Докажите, что в этой таблице найдутся две строки и два столбца такие, что на концах одной из диагоналей образованного ими прямоугольника стоят нули, а другой — единицы.

4.4.9. [Mos — 2011.8.6] В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

4.4.10. [Mos — 2012.8.6] В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа — нули. При каких числах m и n, больших 100, такое возможно?

4.4.11. [Vse — 2007.F.8.8] В квадрате 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке — от 1 до 10 слева направо, во второй — от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать квадрат на доминошки 1×2, посчитать произведение чисел в каждой доминошке и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

4.4.12. [Vse — 2002.F.9.1] Можно ли в клетках таблицы 2002×2002 расставить натуральные числа от 1 до 2002^2 так, чтобы для каждой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других?

4.4.13. [Vse — 2005.F.9.2] Леша поставил в клетки таблицы 22×22 натуральные числа от 1 до 22^2. Верно ли, что Олег может выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел, стоящих в этих клетках, делится на 4?

4.5 Турниры

4.5.1. [Mos — 2007.8.3] В футбольном чемпионате участвовали 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой из остальных по одному разу, за победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Назовем команду *успешной*, если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

4.5.2. [Mos — 2017.9.2] В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками.

4.5.3. [Eul — 2013.F.5] В гандболе за победу дают 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. 14 гандбольных команд провели турнир, где каждая команда с каждой сыграла по одному разу. Оказалось, что никакие две команды не набрали поровну очков. Могло ли случиться, что каждая из команд, занявших первые три места, проиграла каждой из команд, занявших последние три места?

4.5.4. [Mos — 1999.8.6] В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных две партии: одну белыми фигурами, другую – черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

4.5.5. [Eul — 2009.R.8] В футбольном турнире участвовало 8 команд, причём каждая сыграла с каждой ровно по одному разу Известно, что любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное общее число ничьих в этом турнире. (За выигрыш матча команде начисляется 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)

4.5.6. [Vse — 2005.R.9.1] В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой из остальных ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль?

4.5.7. [Mos — 2011.9.2] В турнире каждый участник встретился с каждым из остальных один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается?

4.6 Игры и стратегии

4.6.1. [Eul — 2009.R.5] На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить натуральное число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

4.6.2. [Eul — 2015.R.5] На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т. д., по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?

4.6.3. [Vse — 2006.R.8.2] Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

4.6.4. [Vse — 2005.R.8.2] В средней клетке полоски 1×2005 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают её: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй передвигает её на 2 клетки, 1-й — на 4 клетки, 2-й — на 8 и т. д. (k-й сдвиг происходит на 2^{k-1} клеток). Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может выиграть независимо от игры соперника?

4.6.5. [Vse — 2003.R.8.3] Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a + 1$, если на доске уже написано число a. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

4.6.6. [Vse — 2002.R.8.3] Имеется 11 пустых коробок. За один ход можно положить по одной монете в какие-то 10 из них. Играют двое, ходят по очереди. Побеждает тот, после хода которого впервые в одной из коробок окажется 21 монета. Кто выигрывает при правильной игре?

4.6.7. [Vse — 1999.R.8.7;9.6] В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

4.6.8. [Vse — 2017.R.9.2;11.2] Вася задумал восемь клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску восемь ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (то есть 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?

4.6.9. [Eul — 2012.F.2] Олег и Сергей по очереди выписывают слева направо по одной цифре, пока не получится девятизначное число. При этом нельзя выписывать цифры, которые уже выписаны. Начинает (и заканчивает) Олег. Олег побеждает, если полученное число кратно 4, в противном случае побеждает Сергей. Кто победит при правильной игре?

4.6.10. [Mos — 1999.9.2] Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А или Б (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того, как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (то есть слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

4.6.11. [Mos — 2002.8.4] Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

4.6.12. [Vse — 2000.R.8.4] Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам. Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем также поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению) и т. д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достаётся алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его? Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

4.6.13. [Vse — 1996.R.8.4] На столе лежат n спичек ($n > 1$). Двое игроков по очереди снимают их со стола. Первым ходом игрок снимает со стола любое число спичек от 1 до $n-1$, а дальше каждый раз можно брать со стола не больше спичек, чем взял предыдущим ходом партнёр. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Найдите все n, при которых первый игрок может обеспечить себе выигрыш.

4.6.14. [Mos — 2007.8.5;10.4] Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель её туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет ещё одну карту, и так сколько угодно раз, пока сам не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

4.6.15. [Vse — 2001.R.8.4] Уголком размера $n \times m$, где $m, n \geqslant 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

4.6.16. [Eul — 2009.F.7] На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется 3 ореха. Если это — три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе — его соперник. Кто из игроков может выигрывать, как бы не играл соперник?

4.6.17. [Vse — 1998.R.9.6] На концах клетчатой полоски размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева — фишка первого игрока, справа — второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противоположного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

4.6.18. [Vse — 1997.R.9.2] На доске записаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на 3, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет — то его партнёр. Кто из них выиграет при правильной игре?

4.6.19. [Vse — 2018.F.9.5] На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать?

4.6.20. [Mos — 1994.8.6] Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

4.6.21. [Mos — 2001.8.5] Лёша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Считается, что он отгадал, если одну цифру он назвал правильно, а в другой ошибся не более чем на единицу (например, если задумано число 65, то 65, 64 и 75 подходят, а 63, 76 и 56 — нет). Придумайте способ, гарантирующий Грише успех за 22 попытки (какое бы число ни задумал Лёша).

4.6.22. [Mos — 2001.8.6] Покажите, что в условиях предыдущей задачи нет способа, гарантирующего Грише успех за 18 попыток.

4.6.23. [Mos — 2003.8.6] Боря задумал целое число, большее чем 100. Кира называет целое число, большее чем 1. Если Борино число делится на это число, Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа названное, и Кира называет следующее число. Ей запрещается повторять числа, названные ранее. Если Борино число станет отрицательным — Кира проигрывает. Есть ли у неё выигрышная стратегия?

4.6.24. [Mos — 2009.8.6] Двое играющих по очереди пишут — каждый на своей половине доски — по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила 10000. После того, как сумма всех чисел на доске становится равной 10000, игра заканчивается подсчётом суммы всех цифр на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах — ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник?

4.6.25. [Mos — 2013.8.6] На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?

4.6.26. [Mos — 2008.8.6] У игрока есть M золотых и N серебряных монет. В начале каждого раунда игрок ставит какие-то монеты на красное, какие-то на чёрное (можно вообще ничего не ставить на один из цветов, часть монет можно никуда не ставить). В конце каждого раунда крупье объявляет, что один из цветов выиграл. Ставку на выигравший цвет крупье отдает игроку, удваивая в ней количество монет каждого вида, а ставку на проигравший цвет забирает себе.

Игрок хочет, чтобы монет одного вида у него стало ровно в три раза больше, чем другого (в частности, его устроит остаться совсем без денег). При каких M и N крупье не сможет ему помешать?

4.6.27. [Mos — 2005.8.6] На плоскости даны 2005 точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Каждые две точки соединены отрезком. Тигр и Осёл играют в следующую игру. Осёл помечает каждый отрезок одной из цифр, а затем Тигр помечает каждую точку одной из цифр. Осёл выигрывает, если найдутся две точки, помеченные той же цифрой, что и соединяющий их отрезок, и проигрывает в противном случае. Доказать, что при правильной игре Осёл выиграет.

4.7 Шахматные доски и фигуры

4.7.1. [Mos — 1997.8.1] В некоторых клетках шахматной доски стоят фигуры. Известно, что на каждой горизонтали стоит хотя бы одна фигура, причём в разных горизонталях — разное число фигур. Докажите, что всегда можно отметить 8 фигур так, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали стояла ровно одна отмеченная фигура.

4.7.2. [Vse — 1996.R.8.5] Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8×8, чтобы в каждых двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в каждых двух строках — различным?

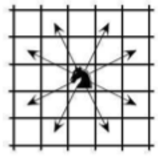
4.7.3. [Mos — 1992.8.2] Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

4.7.4. [Mos — 1996.8.5] В углу шахматной доски размером $n\times n$ полей стоит ладья. При каких n, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, она может за n^2 ходов побывать на всех полях доски и вернуться на место? (Учитываются только поля, на которых ладья останавливалась, а не те, над которыми она проносилась во время хода. За каждым горизонтальным ходом должен следовать вертикальный, а за каждым вертикальным — горизонтальный.)

4.7.5. [Eul — 2011.R.4] Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая ломаная без самопересечений. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченной ею части доски общая площадь чёрных кусков равна общей площади белых кусков.

4.7.6. [Vse — 2007.R.8.4] На шахматной доске расставлены во всех клетках 32 белых и 32 чёрных пешки. Пешка может бить пешки противоположного цвета, делая ход по диагонали на одну клетку и становясь на место взятой пешки (белые пешки могут бить только вправо-вверх и влево-вверх, а чёрные — только влево-вниз и вправо-вниз). Другим образом пешки ходить не могут. Какое наименьшее количество пешек может остаться на доске?

4.7.7. [Eul — 2015.R.8] На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г» (см. рисунок).



4.7.8. [Eul — 2013.F.2] Из шахматной доски размером 13×13 вырезали две противоположные угловые клетки. На оставшейся части доски отметили несколько клеток. Докажите, что на отмеченные клетки можно поставить шахматных королей так, чтобы всего королей было не больше 47, и они били все пустые отмеченные клетки. Напомним, что шахматный король бьёт все клетки, соседние с ним по вертикали, горизонтали и диагонали.

4.7.9. [Vse — 2006.F.9.1;10.1] Дана доска 15×15. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

4.7.10. [Mos — 2000.8.6] Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5×5 клеток так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

4.7.11. [Vse — 2002.F.9.5] На шахматной доске стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями — это расстояние между центрами клеток, в которых они стоят.)

4.7.12. [Vse — 1993.F.9.7] Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали (не только на главных) находилось чётное число фишек?

Глава 5

Графы

5.1 Знакомства

5.1.1. [Mos — 1998.8.5] За круглым столом сидят несколько гостей. Некоторые из них знакомы между собой; знакомство взаимно. Все знакомые каждого гостя (считая его самого) сидят вокруг стола через равные промежутки. (Для другого человека эти промежутки могут быть другими.) Известно, что каждые двое имеют хотя бы одного общего знакомого. Докажите, что все гости знакомы друг с другом.

5.1.2. [Vse — 2018.R.9.10;11.9] В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

5.2 Степень вершины

5.2.1. [Vse — 2000.R.8.2] В некотором городе на каждом перекрёстке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрёстке сходятся улицы трёх разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

5.2.2. [Eul — 2016.F.2] В стране Эйлерии 101 город. Каждые два города соединены двусторонним беспосадочным рейсом одной из 99 авиакомпаний. Известно, что из каждого города выходят рейсы всех 99 компаний. Назовём *треугольником* три города, попарно соединённых рейсами одной и той же компании. Докажите, что в Эйлерии не больше одного треугольника.

5.2.3. [Vse — 2006.R.8.4] Каждая деталь конструктора «Юный паяльщик» — это скобка в виде буквы П, состоящая из трёх единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединённых единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)

5.2.4. [Vse — 2000.R.8.8] В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причём для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (то есть 1, 2, 4, 8, …). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.

5.2.5. [Vse — 1999.R.8.8] Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Каждый квадрат (кроме крайних) соединён с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

5.3 Связность. Деревья

Граф называется *связным*, если между любой парой его вершин существует путь по рёбрам. *Дерево* — это связный граф без циклов.

5.3.1. Докажите следующие факты.

а) В дереве имеется *висячая* вершина (степени 1).

б) В дереве найдутся как минимум две висячие вершины.

в) Число рёбер дерева на единицу меньше числа вершин.

г) Из связного графа, не являющегося деревом, можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево.

д) В связном графе на n вершинах число рёбер не меньше $n - 1$.

е) Связный граф, число рёбер которого на единицу меньше числа вершин, является деревом.

ж) Все вершины дерева можно покрасить в два цвета так, чтобы любая пара смежных вершин была разноцветной (иными словами, дерево — это двудольный граф).

5.3.2. [Mos — 2003.8.5] В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

5.3.3. [Eul — 2017.R.4] Между городами страны организованы двусторонние беспосадочные авиарейсы таким образом, что от каждого города до каждого другого можно добраться (возможно, с пересадками). Более того, для каждого города A существует город B такой, что любой из остальных городов соединён напрямую с A или с B. Докажите, что от любого города можно добраться до любого другого не более чем с двумя пересадками.

5.3.4. [Eul — 2018.R.5] В Тридесятом царстве из каждого города выходит по 30 дорог, причём каждая дорога соединяет два города, не проходя через другие города. Тридесятый царь захотел разместить в некоторых городах по дорожно-эксплуатационному управлению (ДЭУ), обслуживающему все выходящие из города дороги, так, чтобы каждая дорога обслуживалась хотя бы одним управлением и управления были размещены не более чем в половине городов. Может ли так оказаться, что у царя существует ровно 2018 способов сделать это?

5.3.5. [Eul — 2018.F.7] Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.

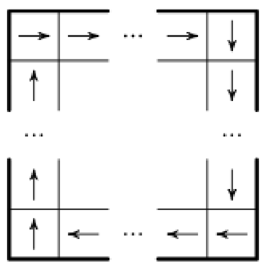
5.3.6. [Eul — 2015.F.7] В стране Графинии n ($n \geqslant 2$) городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше d авиалиний. Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на $n/2 + d$ групп таким образом, чтобы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп.

5.3.7. [Vse — 1999.F.9.2] В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причём из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N - 1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из каждого города можно долететь до любого другого.

5.4 Обход графов

5.4.1. [Eul — 2010.F.2] В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причём если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолёты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолёты всех трёх компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трёх компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

5.4.2. [Mos — 2010.8.6] В некоторых клетках квадрата 20×20 стоит стрелочка в одном из четырёх направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке (см. рисунок). Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направлениях. Докажите, что найдётся клетка, в которой стрелочки нет.



5.4.3. [Vse — 2003.F.9.5;10.5] В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

5.4.4. [Mos — 1992.8.6] Можно ли 4 раза рассадить 9 человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза?

5.5 Ориентированные графы

5.5.1. [Vse — 2017.F.9.1] В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

5.5.2. [Vse — 2007.R.8.8] В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

5.5.3. [Eul — 2009.F.4] В стране Леонардии все дороги — с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.

Глава 6

Алгебра

6.1 Алгебраические преобразования

6.1.1. [Mos — 1996.8.1] Известно, что $a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}$. Верно ли, что $a = b$?

6.1.2. [Mos — 2000.8.1] Два различных числа x и y (не обязательно целых) таковы, что

$$x^2 - 2000x = y^2 - 2000y.$$

Найдите сумму чисел x и y.

6.1.3. [Eul — 2015.R.1] На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

6.1.4. [Eul — 2011.R.2] Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

6.1.5. [Eul — 2018.R.2] Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

6.1.6. [Vse — 2001.R.8.5] Пусть a, b, c, d, e и f — некоторые числа, причём $ace \neq 0$. Известно, что значения выражений $|ax + b| + |cx + d|$ и $|ex + f|$ равны при всех значениях x. Докажите, что $ad = bc$.

6.1.7. [Mos — 1993.8.2] Известно, что число n является суммой квадратов трёх натуральных чисел. Показать, что число n^2 тоже является суммой квадратов трёх натуральных чисел.

6.1.8. [Mos — 1999.8.3] Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются полными квадратами.

6.1.9. [Eul — 2016.R.6] Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде

$$\frac{xy + yz + zx}{x + y + z},$$

где x, y и z — три различных натуральных числа.

6.1.10. [Eul — 2018.F.5] Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что $a + b + c = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2n + 1$. Докажите, что $a^3 + b^2 - a^2 - b^3$ делится на n.

6.1.11. [Mos — 1998.9.1] Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?

6.1.12. [Mos — 2000.9.1] Решите уравнение

$$(x + 1)^{63} + (x + 1)^{62}(x - 1) + (x + 1)^{61}(x - 1)^2 + \ldots + (x - 1)^{63} = 0.$$

6.1.13. [Eul — 2009.R.6] В трёх клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трёх разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трёх исходных чисел (какими бы они ни были).

6.1.14. [Eul — 2013.R.4] Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a + b + c + d + e + f) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}\right) = 2012\,?$$

6.1.15. [Eul — 2009.F.2] При всяком ли натуральном n, большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n-1}$, $\frac{3}{n-2}$, …, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

6.1.16. [Eul — 2012.F.6] Существуют ли такие различные натуральные числа a, b и c, что число $a + \frac{1}{a}$ равно полусумме чисел $b + \frac{1}{b}$ и $c + \frac{1}{c}$?

6.1.17. [Eul — 2010.F.7] Докажите, что для произвольных a, b, c равенство

$$\frac{a(b - c)}{b + c} + \frac{b(c - a)}{c + a} + \frac{c(a - b)}{a + b} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

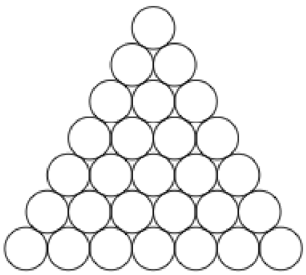
$$\frac{a^2(b - c)}{b + c} + \frac{b^2(c - a)}{c + a} + \frac{c^2(a - b)}{a + b} = 0.$$

6.2 Суммирование

6.2.1. [Mos — 2013.8.4] По кругу расставили 1000 чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочередно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел. Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?

6.3 Подсчёт двумя способами

6.3.1. [Mos — 2010.8.2] На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (см. рисунок). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



6.3.2. [Mos — 1992.8.3] Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме — во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.

6.3.3. [Vse — 1997.R.8.4] На предприятии трудятся 50000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчинённых равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издаёт приказ и выдаёт копию этого приказа каждому своему непосредственному подчинённому (если такие есть). Далее, каждый день работник берёт все полученные им в предыдущий день приказы и либо раздаёт их копии всем своим непосредственным подчинённым, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по учреждению не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.

6.3.4. [Mos — 2006.8.6] Каждую неделю Ваня получает ровно одну оценку («3», «4» или «5») по каждому из семи предметов. Он считает неделю удачной, если количество предметов, по которым оценка улучшилась, превышает хотя бы на два количество предметов, по которым оценка ухудшилась. Оказалось, что n недель подряд были удачными, и в последнюю из них оценка по каждому предмету в точности совпала с оценкой первой недели. Чему могло равняться число n? (Найдите все варианты.)

6.4 Доказательство неравенств

6.4.1. [Mos — 1992.8.1] Докажите, что если $a + b + c + d > 0$, $a > c$, $b > d$, то $|a + b| > |c + d|$.

6.4.2. [Mos — 2016.9.1] Сумма трёх положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

6.4.3. [Eul — 2015.F.3] По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

6.4.4. (*Неравенство Коши*) Для любых неотрицательных чисел a и b докажите, что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\,.$$

Когда достигается равенство?

6.4.5. Для любых $a, b, c \geqslant 0$ докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

6.4.6. [Vse — 1995.R.9.1] Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{1}{xy}\,.$$

6.4.7. [Eul — 2016.F.7] Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \leqslant 8.$$

6.4.8. (*Транснеравенство*) Пусть $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что

$$x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1.$$

6.4.9. [Eul — 2012.R.7] 1000 различных положительных чисел записаны в ряд в порядке возрастания. Вася разбил эти числа на 500 пар соседних и нашел суммы чисел во всех парах. Петя разбил эти же числа на 500 пар таким образом, что между числами в каждой паре стоит ровно три других числа, и тоже нашел суммы чисел во всех парах. Докажите, что произведение сумм, найденных Петей, больше, чем произведение сумм, найденных Васей.

6.4.10. [Eul — 2013.F.4] Каждое из чисел x, y и z не меньше 0 и не больше 1. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} + \frac{y^2}{1+y+xyz} + \frac{z^2}{1+z+xyz} \leqslant 1.$$

6.4.11. [Mos — 2002.9.2] Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

6.4.12. [Mos — 2010.9.3] У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются товарищами, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

6.4.13. [Vse — 2018.R.9.5] Числа x, y и z удовлетворяют условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что
$$(x - y)(y - z)(x - z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

6.5 Квадратный трёхчлен

6.5.1. [Mos — 2004.8.1] У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

6.5.2. [Mos — 2014.9.1] Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число.

6.5.3. [Mos — 2017.10.1] Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет два действительных корня. Каждый из трёх его коэффициентов (включая коэффициент при x^2) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трёхчлена также увеличились на 1?

6.5.4. [Mos — 2009.8.3] Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (a, b и c — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

6.5.5. [Vse — 2007.F.8.1] Даны числа a, b, c. Докажите, что хотя бы одно из уравнений
$$x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0, \quad x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0, \quad x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$$
имеет решение.

6.5.6. [Mos — 2014.8.5] В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен общей высотой в 30 этажей.

Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

6.5.7. [Vse — 2000.R.9.1] Миша решил уравнение $x^2 + ax + b = 0$ и сообщил Диме набор из четырёх чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

6.5.8. [Vse — 1998.R.9.1] Корни двух приведённых квадратных трёхчленов — отрицательные целые числа, причем один из этих корней — общий. Могут ли значения этих трёхчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

6.5.9. [Vse — 1996.R.9.1] Найдите все пары квадратных трёхчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d такие, что a и b — корни второго трёхчлена, c и d — корни первого.

6.5.10. [Vse — 1993.R.9.1] Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

6.5.11. [Vse — 2002.R.9.2] Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

6.5.12. [Vse — 2001.R.9.2] Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют один из коэффициентов a или b квадратного трёхчлена $x^2 + ax + b$: Петя на 1, Коля — на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трёхчлен, имеющий целые корни. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах a и b независимо от игры Пети?

6.5.13. [Eul — 2017.F.2] График $y = x+b\sqrt{x}+c$, где $c > 0$, имеет с осью ординат общую точку C, а ось абсцисс пересекает в точках X_1 и X_2. Обозначим через O начало координат. Докажите, что $\angle CX_1O + \angle CX_2O = 90°$.

6.5.14. [Vse — 2000.F.9.1] Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2+bx+c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$.

6.5.15. [Vse — 1997.F.9.5] Существуют ли такие действительные числа b и c, что каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b + 1)x + c + 1 = 0$ имеет по два целых корня?

6.5.16. [Vse — 2017.F.9.6] Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3?

6.6 Периодичность

6.6.1. [Mos — 2002.8.6] В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ каждая клетка может быть либо живой, либо мёртвой. Каждую минуту одновременно все живые клетки умирают, а те мёртвые, у которых было нечётное число живых соседей (по стороне), оживают.

Укажите все пары (m, n), для которых найдётся такая начальная расстановка живых и мёртвых клеток, что жизнь в прямоугольнике будет существовать вечно (то есть в каждый момент времени хотя бы одна клетка будет живой)?

Глава 7

Комбинаторика

7.1 Принцип Дирихле

7.1.1. [Mos — 2008.8.2] В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

7.1.2. [Vse — 2001.R.8.7] Можно ли клетки доски 5×5 покрасить в 4 цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее чем в три цвета?

7.1.3. [Vse — 2001.R.9.5] Внутри выпуклого пятиугольника выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырёхугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что внутрь него попадут обе выбранные точки.

7.1.4. [Mos — 1996.9.1] Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике имеется не более 35 углов, меньших $170°$.

7.1.5. [Mos — 2006.9.2] На олимпиаде $m > 1$ школьников решали $n > 1$ задач. Все школьники решили разное количество задач. Все задачи решены разным количеством школьников. Докажите, что один из школьников решил ровно одну задачу.

7.1.6. [Vse — 2004.F.9.1;10.1;11.1] Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

7.1.7. [Mos — 1996.8.6] а) Восемь школьников решали 8 задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 школьников. Докажите, что найдутся такие два школьника, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

б) Если каждую задачу решили 4 ученика, то может оказаться, что таких двоих не найдётся (приведите пример).

7.2 Правила суммы и произведения

7.2.1. [Vse — 1996.R.8.2] Назовем билет с номером от 000000 до 999999 *отличным*, если разность некоторых двух соседних цифр его номера равна 5. Найдите число отличных билетов.

Глава 8

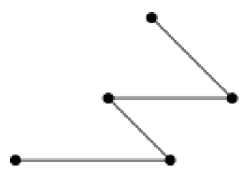
Комбинаторная геометрия

8.1 Системы точек и отрезков

8.1.1. [Mos — 2001.9.1] Можно ли расставить на футбольном поле четырёх футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

8.1.2. [Mos — 2001.8.2] Можно ли поставить на плоскости 100 точек (сначала первую, потом вторую и так далее до сотой) так, чтобы никакие три точки не лежали на одной прямой и чтобы в любой момент фигура, состоящая из уже поставленных точек, имела ось симметрии?

8.1.3. [Mos — 2014.8.2] Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причём для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена (пример змейки см. на рисунке). Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашёл 6 разных способов соединить их (пятизвенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?

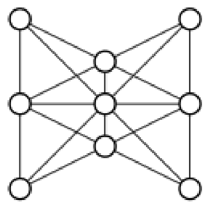


8.1.4. [Mos — 2012.8.3] На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары, после чего соединяет точки в каждой из пар отрезком. Всегда ли он может это сделать так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

8.1.5. [Mos — 2008.8.5] Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых шести нашлись 3, лежащие на одной прямой. (На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)

8.1.6. [Mos — 2014.8.6] На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рисунок). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда от них отличается.

Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?

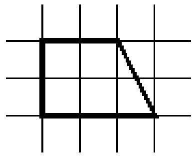


8.1.7. [Vse — 1998.R.8.4] На плоскости дано множество из $n \geqslant 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях.

8.2 Разрезания

8.2.1. [Eul — 2018.R.1; Vse — 2018.R.9.1;10.1] Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

8.2.2. [Mos — 2004.8.2] Разрежьте изображённую на рисунке трапецию на три части и сложите из них квадрат.



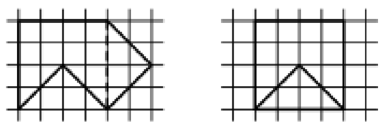
8.2.3. [Mos — 2005.8.2] Клетчатый бумажный квадрат 8×8 согнули несколько раз по линиям клеток так, что получился квадратик 1×1. Его разрезали по отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон квадратика. На сколько частей мог при этом распасться квадрат?

8.2.4. [Eul — 2015.F.1] Назовём *хорошими прямоугольниками* квадрат со стороной 2 и прямоугольник со сторонами 1 и 11. Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами, большими 100, можно разрезать на хорошие прямоугольники.

8.2.5. [Eul — 2016.F.5] Можно ли прямоугольник 1000×2016 разрезать на прямоугольники 1×2015 и трёхклеточные «уголки» так, чтобы присутствовали фигурки обоих видов?

8.2.6. [Vse — 2003.R.8.4] Докажите, что произвольный треугольник можно разрезать на три многоугольника, один из которых должен быть тупоугольным треугольником, так, чтобы потом сложить из них прямоугольник. (Переворачивать части можно).

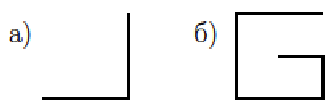
8.2.7. [Mos — 2006.8.5] Серёжа придумал фигуру, которую легко разрезать на две части и сложить из них квадрат (см. рисунок). Покажите как по-другому разрезать эту фигуру на две части, из которых тоже можно сложить квадрат.



8.2.8. [Mos — 2005.8.5] Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них.

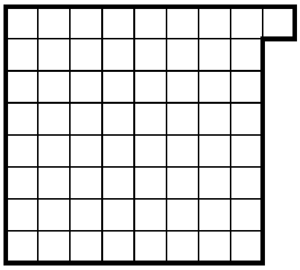
8.2.9. [Mos — 2015.9.3] Каждый день Фрёкен Бок испекает квадратный торт размером 3×3. Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

8.2.10. [Mos — 2017.9.3] Существует ли клетчатый многоугольник, который можно поделить на две равные части разрезом такой формы? Разрез должен лежать внутри многоугольника (на границу могут выходить только концы разреза).



8.3 Покрытия и замощения

8.3.1. [Mos — 2004.8.6] На шахматную доску произвольным образом уложили 32 доминошки (прямоугольника 1×2), так что доминошки не перекрываются. Затем к доске добавили одну клетку, как показано на рисунке. Разрешается вынимать любую доминошку, а затем класть её на две соседние пустые клетки.



Докажите, что можно расположить все доминошки горизонтально.

8.3.2. [Mos — 1998.8.6] Красный квадрат покрывают 100 белых квадратов. При этом все квадраты одинаковы и стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один из белых квадратов так, что оставшиеся белые квадраты все ещё будут покрывать целиком красный квадрат?

Комментарий. Во фразе «все квадраты одинаковы» имеется в виду, что все белые квадраты имеют тот же размер, что и красный.

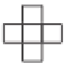
8.4 Раскраски

8.4.1. [Eul — 2014.R.5] На окружности отметили 2013 точек и каждую соединили с двумя соседними. Также отметили центр окружности и соединили его со всеми остальными отмеченными точками. Можно ли покрасить 1007 отмеченных точек в красный, а остальные 1007 — в синий цвет так, чтобы каждая красная точка была соединена с нечётным числом синих, а каждая синяя — с чётным числом синих?

8.4.2. [Vse — 2002.R.8.2;9.1] Клетки квадрата 9×9 окрашены в красный и белый цвета. Докажите, что найдётся или клетка, у которой ровно два красных соседа по углу, или клетка, у которой ровно два белых соседа по углу (или и то, и другое).

8.4.3. [Vse — 2006.R.8.6] В клетчатом квадрате 101×101 каждая клетка внутреннего квадрата 99×99 покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате 3×3 в цвет центральной клетки покрашена ещё ровно одна клетка?

8.4.4. [Mos — 2003.8.3] Можно ли покрасить некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 5 закрашенных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 (вертикальном или горизонтальном) — ровно 4 закрашенные клетки?

8.4.5. [Vse — 1999.R.9.5] Все клетки клетчатой плоскости окрашены в 5 цветов так, что в любой фигуре вида  все цвета различны. Докажите, что и в любой фигуре вида  все цвета различны.

8.4.6. [Vse — 2017.F.9.8;10.7] Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке.

8.4.7. [Mos — 2017.8.6] Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (Прыжок на k клеток означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k-1$ клеток.) Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым*, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что существует непропрыгиваемое n, большее 50.

8.4.8. [Mos — 2017.9.5] Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Φ, что при любом способе вырезать из этого квадрата по границам клеток многоугольник, равный Φ, в нём все 10 клеток оказываются разного цвета. Обязательно ли Φ — прямоугольник?

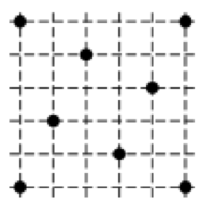
8.5 Целочисленные решётки

8.5.1. [Mos — 2013.8.5] Будем называть точку плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то ещё узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

8.5.2. [Vse — 2004.R.8.8] Можно ли во всех точках плоскости с целыми координатами записать натуральные числа так, чтобы три точки с целыми координатами лежали на одной прямой тогда и только тогда, когда записанные в них числа имели общий делитель, больший единицы?

8.6 Геометрия на клетчатой бумаге

8.6.1. [Mos — 2012.8.2] Кузнечик умеет прыгать только ровно на 50 см. Он хочет обойти 8 точек, отмеченных на рисунке (сторона клетки равна 10 см). Какое наименьшее количество прыжков ему придётся сделать? (Разрешается посещать и другие точки плоскости, в том числе не узлы сетки. Начинать и заканчивать можно в любых точках.)



8.6.2. [Mos — 1996.8.3] В узлах клетчатой бумаги живут садовники, а вокруг них повсюду растут цветы. За каждым цветком должны ухаживать 3 ближайших к нему садовника. Один из садовников хочет узнать, за каким участком он должен ухаживать. Нарисуйте этот участок.

8.6.3. [Mos — 2009.8.4;9.3] В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ездит параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:

1) в клетке со знаком «прямо» она продолжает путь в том же направлении;

2) в клетке со знаком «поворот» она поворачивает на 90° (в любую сторону по своему выбору).

Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности врезаться в дом?

8.6.4. [Mos — 1994.8.4] Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

8.7 Теорема Хелли

8.7.1. [Mos — 2004.8.5] а) Из картона вырезали 7 выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые 6 из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все 7 нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

б) Из картона вырезали 8 выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые 7 из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все 8 — нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

Глава 9

Планиметрия

9.1 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

9.1.1. [Eul — 2018.R.4; Vse — 2018.R.9.3] Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

9.1.2. [Eul — 2018.R.8] На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC + CD = AB$.

9.1.3. [Eul — 2018.F.3] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке K. Внутри треугольников AKD и BKC выбрали точки P и Q соответственно так, что

$$\angle KAP = \angle KDP = \angle KBQ = \angle KCQ.$$

Докажите, что прямая PQ параллельна биссектрисе угла AKD.

9.1.4. [Eul — 2018.F.8] Вершина F параллелограмма $ACEF$ лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AC = AD$ и $AE = 2CD$. Докажите, что $\angle CDE = \angle BEF$.

9.1.5. [Eul — 2017.R.3] На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. На биссектрисах треугольников ABC и APQ, исходящих из вершин B и Q, выбраны точки X и Y соответственно так, что $XY \parallel BC$. Докажите, что $PX = CY$.

9.1.6. [Eul — 2017.R.6] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектриса угла B проходит через середину стороны AD, а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD.

9.1.7. [Eul — 2017.F.3] Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = BC = CD = DE = 1$. Докажите, что $AD < 2$.

9.1.8. [Eul — 2017.F.6] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны $100°$. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = CY$. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY.

9.1.9. [Eul — 2016.R.3] В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD. Известно, что $\angle ABD = 90°$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90°$. Докажите, что $MF \perp CD$.

9.1.10. [Eul — 2016.R.8] Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45°$.

9.1.11. [Eul — 2016.F.3] Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку A, точка E — на продолжении BC за точку C, а точка F — на продолжении AC за точку C так, что $CF = AD$ и $AC + EF = DE$. Найдите угол BDE.

9.1.12. [Eul — 2016.F.8] Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что $LN \parallel AB$.

9.1.13. [Eul — 2015.R.4] Серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам AB и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, пересекают стороны CD и DA в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка X такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая BX делит диагональ AC пополам.

9.1.14. [Eul — 2015.R.7] В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

9.1.15. [Eul — 2015.F.2] В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC. На продолжении стороны BC за точку C отметили точку N так, что $2BN = AB + BC$. Пусть BS — биссектриса треугольника ABC, M — середина стороны AC, а L — такая точка на отрезке BS, что $ML \parallel AB$. Докажите, что $2LN = AC$.

9.1.16. [Eul — 2015.F.8] CK — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках C, L и T подобен исходному.

9.1.17. [Eul — 2014.R.4] На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

9.1.18. [Eul — 2014.R.6] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

9.1.19. [Eul — 2014.F.2] На стороне AB треугольника ABC с углом в $100°$ при вершине C взяты точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите угол NMK.

9.1.20. [Eul — 2014.F.8] Диагональ выпуклого 101-угольника будем называть *главной*, если по одну сторону от неё лежит 50, а по другую — 49 вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей.

9.1.21. [Eul — 2013.R.3] На отрезке AB отмечена точка M. Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ. Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB, а F — середина отрезка DE. Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C.

9.1.22. [Eul — 2013.R.6] Дан остроугольный треугольник ABC. Высота AA_1 продолжена за вершину A на отрезок $AA_2 = BC$. Высота CC_1 продолжена за вершину C на отрезок $CC_2 = AB$. Найдите углы треугольника A_2BC_2.

9.1.23. [Eul — 2013.F.3] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

9.1.24. [Eul — 2013.F.6] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

9.1.25. [Eul — 2012.R.2] Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD прямой и $BC + CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

9.1.26. [Eul — 2012.R.8] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. На сторонах AB, BC, CD, DA взяты точки K, L, M, N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN.

9.1.27. [Eul — 2012.F.1] На стороне BC треугольника ABC взята точка D таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку AD проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника ABC.

9.1.28. [Eul — 2012.F.4] Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

9.1.29. [Eul — 2012.F.7] Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $2\angle A + \angle B = \angle C$. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$.

9.1.30. [Eul — 2011.R.3] Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB + CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.

9.1.31. [Eul — 2011.R.8] В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно. На медиане BM выбрана точка P, не лежащая на CN. Оказалось, что $PC = 2PN$. Докажите, что $AP = BC$.

9.1.32. [Eul — 2011.F.4] Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна $180°$. Докажите, что $PB + PC < AD$.

9.1.33. [Eul — 2011.F.6] Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

9.1.34. [Eul — 2010.R.3] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в её середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

9.1.35. [Eul — 2010.R.8] Биссектрисы углов A и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов B и D — в точке Q, отличной от P. Докажите, что если отрезок PQ параллелен основанию AD, то трапеция равнобокая.

9.1.36. [Eul — 2010.F.3] В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM.

9.1.37. [Eul — 2010.F.6] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему может быть равно отношение $AD : AB$?

9.1.38. [Eul — 2009.R.2] Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

9.1.39. [Eul — 2009.R.7] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

9.1.40. [Eul — 2009.F.3] В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC, равно $AD + DC$.

9.1.41. [Eul — 2009.F.6] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

9.2 Всероссийская олимпиада школьников по математике

9.2.1. [Vse — 2007.R.8.1] В выпуклом четырёхугольнике семь из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.

9.2.2. [Vse — 2007.R.8.7] Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка M таким образом, что $\angle AMC = 2\angle B$. На отрезке AM нашлась такая точка K, что $\angle BKM = \angle B$. Докажите, что $BK = KM + MC$.

9.2.3. [Vse — 2007.F.8.3] На стороне BC ромба $ABCD$ выбрана точка M. Прямые, проведённые через M перпендикулярно диагоналям BD и AC, пересекают прямую AD в точках P и Q соответственно. Оказалось, что прямые PB, QC и AM пересекаются в одной точке. Чему может быть равно отношение $BM : MC$?

9.2.4. [Vse — 2007.F.8.6] Через точку I пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Треугольник BMN оказался остроугольным. На стороне AC выбраны точки K и L так, что $\angle ILA = \angle IMB$, $\angle IKC = \angle INB$. Докажите, что $AM + KL + CN = AC$.

9.2.5. [Vse — 2006.R.8.7] Медиану AA_0 треугольника ABC отложили от точки A_0 перпендикулярно стороне BC во внешнюю сторону треугольника. Обозначим второй конец построенного отрезка через A_1. Аналогично строятся точки B_1 и C_1. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы треугольника ABC равны 30°, 30° и 120°.

9.2.6. [Vse — 2005.R.8.4] Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричны соответственно вершинам B и C относительно прямых AC и AB. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA.

9.2.7. [Vse — 2005.R.8.6] В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.

9.2.8. [Vse — 2004.R.8.3] В остроугольном треугольнике расстояние от середины каждой стороны до противоположной вершины равно сумме расстояний от неё до сторон треугольника. Докажите, что этот треугольник — равносторонний.

9.2.9. [Vse — 2004.R.8.6] Пусть $ABCD$ — четырёхугольник с параллельными сторонами AD и BC; M и N — середины его сторон AB и CD соответственно. Прямая MN делит пополам отрезок, соединяющий центры окружностей, описанных около треугольников ABC и ADC. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

9.2.10. [Vse — 2003.R.8.7] В треугольнике ABC угол C — прямой. На стороне AC нашлась такая точка D, а на отрезке BD — такая точка K, что $\angle B = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$.

9.2.11. [Vse — 2002.R.8.4] Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. На его сторонах построены внешним образом правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ не может быть правильным.

9.2.12. [Vse — 2002.R.8.6] Каждую сторону выпуклого четырёхугольника продолжили в обе стороны и на всех восьми продолжениях отложили равные между собой отрезки. Оказалось, что получившиеся восемь точек — внешние концы построенных отрезков — различны и лежат на одной окружности. Докажите, что исходный четырёхугольник — квадрат.

9.2.13. [Vse — 2001.R.8.3] Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы прилегают к одной стороне пятиугольника.

9.2.14. [Vse — 2001.R.8.8] Докажите, что любой треугольник можно разрезать не более чем на три части, из которых складывается равнобедренный треугольник.

9.2.15. [Vse — 2000.R.8.3] Какое наименьшее число сторон может иметь нечётноугольник (не обязательно выпуклый), который можно разрезать на параллелограммы?

9.2.16. [Vse — 2000.R.8.7] Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая, симметричная AB относительно CE, пересекает прямую, симметричную BC относительно AD, в точке K. Докажите, что $KO \perp AC$.

9.2.17. [Vse — 1999.R.8.3] На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1, причём медианы A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC и CA. В каком отношении точки A_1, B_1 и C_1 делят стороны треугольника ABC?

9.2.18. [Vse — 1999.R.8.6] Дан треугольник ABC. Точка A_1 симметрична вершине A относительно прямой BC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой AB. Докажите, что если точки A_1, B и C_1 лежат на одной прямой и $C_1B = 2A_1B$, то угол CA_1B — прямой.

9.2.19. [Vse — 1998.R.8.2] В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AM и AN делить угол BAD на три равные части?

9.2.20. [Vse — 1998.R.8.7] Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC; S_A, S_B, S_C — окружности с центром O, касающиеся сторон BC, CA и AB соответственно. Докажите, что сумма трёх углов: между касательными к S_A, проведёнными из точки A, к S_B — из точки B, и к S_C — из точки C, равна $180°$.

9.2.21. [Vse — 1997.R.8.3] На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K, а на стороне AC — точки E и M, причём $DA+AE = KC+CM = AB$. Докажите, что угол между прямыми DM и KE равен $60°$.

9.2.22. [Vse — 1997.R.8.5] Докажите, что остроугольный треугольник полностью покрывается тремя квадратами, построенными на его сторонах как на диагоналях.

9.2.23. [Vse — 1996.R.8.3] Существует ли выпуклый пятиугольник (все углы меньше $180°$) $ABCDE$, у которого все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC — тупые?

9.2.24. [Vse — 1996.R.8.6;9.6] Точечный прожектор, находящийся в вершине B равностороннего треугольника ABC, освещает угол α. Найдите все такие значения α, не превосходящие $60°$, что при любом положении прожектора, когда освещённый угол целиком находится внутри угла ABC, из освещённого и двух неосвещённых отрезков стороны AC можно составить треугольник.

9.3 Московская математическая олимпиада

9.3.1. [Mos — 2018.8.3] Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K. Точка M — середина BC, точка P — середина KM. Докажите, что если $\angle APB = \angle CPD = 90°$, то $AK = DK$.

9.3.2. [Mos — 2018.8.6;11.5] На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.

9.3.3. [Mos — 2018.9.2] Даны четыре палочки. Оказалось, что из любых трёх из них можно сложить треугольник, при этом площади всех четырёх треугольников равны. Обязательно ли все палочки одинаковой длины?

9.3.4. [Mos — 2017.8.2] На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

9.3.5. [Mos — 2017.8.4] В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны и $AD = BE = CF$. Докажите, что в него можно вписать окружность (то есть внутри шестиугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон).

9.3.6. [Mos — 2016.8.3] На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

9.3.7. [Mos — 2016.8.5] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол A равен $120°$, угол C равен $135°$, а угол D равен $n°$. Найдите все возможные целые значения n.

9.3.8. [Mos — 2015.8.2] Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

9.3.9. [Mos — 2015.8.5] В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45°$, проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE.

9.3.10. [Mos — 2014.8.4] В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

9.3.11. [Mos — 2013.8.2] Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $3 : 1$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

9.3.12. [Mos — 2012.8.4] В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть точка K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

9.3.13. [Mos — 2011.8.3] Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

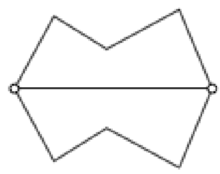
9.3.14. [Mos — 2011.8.5] Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

9.3.15. [Mos — 2010.8.3] В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

9.3.16. [Mos — 2010.8.5] В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Точки M и N — середины сторон BC и AC соответственно. Известно, что угол AIN прямой. Докажите, что угол BIM — также прямой.

9.3.17. [Mos — 2009.8.2] На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

9.3.18. [Mos — 2009.8.5] Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рисунке). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.)



9.3.19. [Mos — 2008.8.3] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$.

9.3.20. [Mos — 2007.8.4] В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность, касающаяся сторон AC, BC и AB в точках M, K и N соответственно. Через точку K провели прямую, перпендикулярную отрезку MN. Она пересекла катет AC в точке X. Докажите, что $CK = AX$.

9.3.21. [Mos — 2007.8.6] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$.

9.3.22. [Mos — 2006.8.3] Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные прямоугольные (стороны AB и A_1B_1 — гипотенузы). Известно, что C_1 лежит на BC, B_1 лежит на AB, а A_1 лежит на AC. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$.

9.3.23. [Mos — 2005.8.3] Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Доказать, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны.

9.3.24. [Mos — 2004.8.3] В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB взяты точки K и L соответственно, причём $KA = AC = CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC, а I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC.

9.3.25. [Mos — 2003.8.4] В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты такие точки X и Y, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

9.3.26. [Mos — 2002.8.3] Дана окружность с диаметром AB. Другая окружность с центром в точке A пересекает отрезок AB в точке C, причём $AC < AB/2$. Общая касательная двух окружностей касается первой окружности в точке D. Докажите, что прямая CD перпендикулярна AB.

9.3.27. [Mos — 2002.8.5] В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что если угол AMB

а) прямой;

б) острый,

то $AC + BC > 3AB$.

9.3.28. [Mos — 2001.8.4] В треугольнике ABC проведены биссектриса AK, медиана BL и высота CM. Треугольник KLM — равносторонний. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

9.3.29. [Mos — 2000.8.3] Длины оснований трапеции равны m см и n см (m и n — натуральные числа, $m \neq n$). Докажите, что трапецию можно разрезать на равные треугольники.

9.3.30. [Mos — 2000.8.4] В треугольнике ABC медиана BM равна стороне AC. На продолжениях сторон BA и AC за точки A и C выбраны соответственно точки D и E, причём $AD = AB$ и $CE = CM$. Докажите, что прямые DM и BE перпендикулярны.

9.3.31. [Mos — 1999.8.2] Покажите, как любой четырёхугольник разрезать на три трапеции (параллелограмм тоже можно считать трапецией).

9.3.32. [Mos — 1999.8.5] В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AC. На отрезке AB взята точка M, а на отрезке BC — точка N, причём угол MON — прямой. Докажите, что $AM^2 + CN^2 = MN^2$.

9.3.33. [Mos — 1998.8.3] Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M лежит на прямой AB, причём $\angle AMO = \angle MAD$. Докажите, что точка M равноудалена от точек C и D.

9.3.34. [Mos — 1997.8.3] Внутри острого угла XOY взяты точки M и N, причём $\angle XON = \angle YOM$. На луче OX отмечена точка Q так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на луче OY — точка P так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

9.3.35. [Mos — 1997.8.5] В ромбе $ABCD$ величина угла B равна $40°$, E — середина BC, F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите величину угла DFC.

9.3.36. [Mos — 1997.9.1] В треугольнике одна сторона в три раза меньше суммы двух других. Докажите, что против этой стороны лежит наименьший угол треугольника.

9.3.37. [Mos — 1996.8.4] Дан равносторонний треугольник ABC. Сторона BC разделена на три равные части точками K и L, а точка M делит сторону AC в отношении $1 : 2$, считая от вершины A. Докажите, что сумма углов AKM и ALM равна $30°$.

9.3.38. [Mos — 1995.8.3] Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и точка O внутри него. Известно, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$, $AO = OB$ и $CO = OD$. Пусть K, L и M — середины отрезков AB, BC и CD соответственно. Докажите, что а) $KL = LM$; б) треугольник KLM — правильный.

9.3.39. [Mos — 1995.8.6] Прямая отсекает треугольник AKN от правильного шестиугольника $ABCDEF$ так, что $AK+AN = AB$. Найдите сумму углов, под которыми отрезок KN виден из вершин шестиугольника ($\angle KAN + \angle KBN + \angle KCN + \angle KDN + \angle KEN + \angle KFN$).

9.3.40. [Mos — 1994.8.3] В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AC.

9.3.41. [Mos — 1994.9.1] Существует ли невыпуклый пятиугольник, никакие две из пяти диагоналей которого не имеют общих точек (кроме вершин)?

9.3.42. [Mos — 1993.8.6] Окружность с центром D проходит через вершины A, B и центр O вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

9.3.43. [Mos — 1992.8.5] Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса, проведённая из вершины прямого угла, не превосходит половины проекции гипотенузы на прямую, перпендикулярную этой биссектрисе.