

Логарифмические уравнения

1. (МГУ, биологический ф-т, 2003) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1} - 2}$$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1.$$

$$\frac{x}{1}$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$(1 - \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x}} = 1.$$

$$\frac{x}{1}$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите уравнение

$$\left| \log_2 \frac{x}{2} \right|^3 + |\log_2 2x|^3 = 28.$$

$$\frac{x}{1}, 4$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\left| \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 2 \right| - |\log_2 x + 2| = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x.$$

$$\{1\} \cap \left[\frac{x}{1}; 0 \right)$$

6. («Физтех», 2015) Решите уравнение

$$x^{\log_3(27x^2)} = \frac{x^9}{81}.$$

$$6, 8$$

7. («Физтех», 2015) Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{400} \right)^{\log_5 \frac{x}{8}} = \frac{1024}{x^3}.$$

$$91, \frac{9}{8}$$

8. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\log_{2^{x+1}+1} (3x^2 + 4x - 3) = \log_{10-2^{2-x}} (3x^2 + 4x - 3).$$

$\frac{3}{2}, 7$

9. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) \cdot \log_{x+1} (x^3 + 1) = \log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) + \log_{x+1} (x^3 + 1).$$

2

10. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{5^x} (x^2 + 9x + 15) + \log_{125^x} x^3 = \frac{2}{x}.$$

1

11. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{4^{x+4}} x^4 + \log_{2^{x+4}} (x + 5)^2 = \frac{4}{x + 4}.$$

$\frac{7}{14\sqrt{13}} = 1$

12. («Физтех», 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y-1} \sqrt{x+2} = \log_{2y+1} x, \\ \log_x \frac{x^3}{2y+1} = \log_{2y-1} (x+2). \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{21\sqrt{13}}, \frac{7}{21\sqrt{13}}\right), \left(\frac{1}{21\sqrt{13}+2}, \frac{7}{21\sqrt{13}+1}\right)$

13. («Физтех», 2009) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y+3} (4y^2 - x^2 + 16y + 6x + 8) = 2, \\ \log_{x-4} (x^2 - 6x - y + 13) = 2. \end{cases}$$

(83, 81)

14. («Физтех», 2007) Решите уравнение

$$2 \log_5 (x^2 - 4) + 4 \sqrt{\log_5 (x - 2)^2 - \log_5 (x + 2)^2} = 5.$$

$\frac{9}{2} + 7$

15. («Физтех», 2018, 11) Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_{x^2} (x^2 - 10x + 21), \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-7} \quad \text{и} \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$$

равно сумме двух остальных.

8 = x

16. («Физтех», 2018, 11) Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_x \left(x - \frac{13}{6} \right), \quad \log_{x - \frac{13}{6}}(x - 3) \quad \text{и} \quad \log_{x-3} x$$

равно произведению двух остальных.

$$\frac{x}{x-13} = x \cdot \frac{x}{11} = x$$

17. (МГУ, ИСАА, 2004) Решите уравнение

$$(\log_3(3^{-2x} + 1) + x) \cdot (2\log_9(3^{2x} + 1) - x - 2) = 3.$$

$$\log_3 \frac{2}{27 \pm 9 \sqrt{29}}$$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\log_3(x + 1) \cdot \log_3(2x - 1) \cdot (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

2

19. («Ломоносов», 2018, 10–11) Найдите все такие наборы чисел x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , что $x_1 = x_{n+1}$ и при всех $k = 1, \dots, n$ выполнено равенство

$$2 \log_2 x_k \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

$$\frac{x}{1} = 1 + 9x = \dots = 9x = 1x \quad \text{или} \quad 8 = 1 + 9x = \dots = 9x = 1x$$