Логарифмические преобразования и вычисления

1. (*ОММО, 2018*) Докажите неравенство

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \ldots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

2. (*МГУ, ВМК, 1984*) Известно, что $\log_a b = 7$. Найдите $\log_{\frac{a}{b}} (a^3 b)$.

$\boxed{-\frac{5}{3}}$

3. (*МГУ, филологич. ф-т, 1988*) Вычислите:

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}.$$

$\boxed{2}$

4. (*МГУ, экономич. ф-т, 1989*) Вычислите:

$$\frac{\log_2 70}{\log_{280} 2} - \frac{\log_2 560}{\log_{35} 2}.$$

$\boxed{3}$

5. (*МГУ, биологич. ф-т, 1998*) Известно, что $\log_a b = \sqrt{5}$. Найдите

$$\log_{a^4 \sqrt[5]{b^6}} \frac{b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[5]{a}}.$$

$\boxed{\frac{20\sqrt{5}-3}{18\sqrt{5}+60}}$

6. (*МГУ, физический ф-т, 1982*) Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Найдите

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}.$$

$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

7. (*МФТИ, 1996*) Выразить $\log_{300} 120$ через a и b, где $a = \log_2 3$ и $b = \log_3 5$.

$\boxed{\frac{3+a+ab}{2+a+2ab}}$

8. (*МФТИ, 1996*) Выразить $\log_{600} 900$ через a и b, где $a = \log_5 2$ и $b = \log_2 3$.

$\boxed{\frac{2(1+a+ab)}{2+3a+ab}}$

9. (*МФТИ, 1996*) Выразить $\log_{140} 350$ через a и b, где $a = \log_7 5$ и $b = \log_5 2$.

$\boxed{\frac{1+2a+ab}{1+a+2ab}}$

10. (*МГУ, геологич. ф-т, 1989*) Сравните $2\log_2 5$ и $3\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{24}$.

Первое число больше

11. (*«Ломоносов», 2017*) Выясните, какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11$.

Первое

12. (*«Ломоносов», 2008*) Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 2 от числа 16^{64} (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

Шесть раз

13. (*«Ломоносов», 2006*) Вычислите

$$\log_2 \log_8 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{64}}}}_{39}$$

−38

14. (*«Ломоносов», 2007*) Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{21}b_{50}} b_1 b_2 \ldots b_{70},$$

где b_1, b_2, $\ldots$ — геометрическая прогрессия?

35

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2012} 2013 \quad \text{или} \quad \log_{2013} 2014.$$

Первое

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2013}{2\lg 2} \quad \text{или} \quad 2\lg\frac{2013}{2} .$$

Второе

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$$\log_{2013}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x\right) \quad \text{и} \quad \log_{2012}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x\right)$$

равны друг другу.

$x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 3 от этих чисел равна 10. Найдите эти числа, если $\log_3 b_1 \cdot \log_3 b_5 = 3$.

3, $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$, 27

19. (*ММО, 2018, 11.1*) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)\, x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)\, x^2 + 1.$$

20. (*ММО, 2015, 11.1*) Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

Да

21. (*Открытая олимпиада ИТМО, 2015, 11*) Известно, что

$$\left(\log_x^2 y + \log_z^2 t\right)\left(\log_y^2 z + \log_x^2 t\right) = 37 \quad \text{и} \quad \log_y t + \log_t y = 5.$$

Найдите $\log_x z + \log_z x$.

± 4