

## Логарифмические преобразования и вычисления

1. (МГУ, ВМК, 1984) Известно, что  $\log_a b = 7$ . Найдите  $\log_{\frac{a}{b}} (a^3 b)$ .

3  
—

2. (МГУ, филологич. ф-т, 1988) Вычислите:

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}.$$

2

3. (МГУ, экономич. ф-т, 1989) Вычислите:

$$\frac{\log_2 70}{\log_{280} 2} - \frac{\log_2 560}{\log_{35} 2}.$$

3

4. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) Известно, что  $\log_a b = \sqrt{5}$ . Найдите

$$\log_{a^4 \sqrt[5]{b^6}} \frac{b \sqrt[3]{b}}{\sqrt[5]{a}}.$$

$\frac{20\sqrt[5]{3}}{9+6\sqrt[5]{81}}$

5. (МГУ, физический ф-т, 1982) Известно, что  $\log_b a = \sqrt{3}$ . Найдите

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}.$$

3  
—

6. (МФТИ, 1996) Выразить  $\log_{300} 120$  через  $a$  и  $b$ , где  $a = \log_2 3$  и  $b = \log_3 5$ .

$\frac{3+a+ab}{2+a+2ab}$

7. (МФТИ, 1996) Выразить  $\log_{600} 900$  через  $a$  и  $b$ , где  $a = \log_5 2$  и  $b = \log_2 3$ .

$\frac{2(1+a+ab)}{2+3a+ab}$

8. (МФТИ, 1996) Выразить  $\log_{140} 350$  через  $a$  и  $b$ , где  $a = \log_7 5$  и  $b = \log_5 2$ .

$\frac{1+a+2ab}{1+2a+ab}$

9. (МГУ, геологич. ф-т, 1989) Сравните  $2 \log_2 5$  и  $3 \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{24}$ .

Первое число больше

10. («Ломоносов», 2017) Выясните, какое из чисел больше:  $11^{\lg 121}$  или  $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11$ .

Первое

11. («Ломоносов», 2008) Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 2 от числа  $16^{64}$  (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

Шесть раз

12. («Ломоносов», 2006) Вычислите

$$\log_2 \log_8 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{64}}}}_{39}$$

88

13. («Ломоносов», 2007) Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{21}b_{50}} b_1 b_2 \dots b_{70},$$

где  $b_1, b_2, \dots$  — геометрическая прогрессия?

38

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2012} 2013 \quad \text{или} \quad \log_{2013} 2014.$$

Первое

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2013}{2 \lg 2} \quad \text{или} \quad 2 \lg \frac{2013}{2}.$$

Второе

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найдите все значения  $x$ , при каждом из которых выражения

$$\log_{2013} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x \right) \quad \text{и} \quad \log_{2012} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x \right)$$

равны друг другу.

$\mathbb{Z} \ni u, ux = x$

17. (Открытая олимпиада ИТМО, 2015, 11) Известно, что

$$(\log_x^2 y + \log_z^2 t) (\log_y^2 z + \log_x^2 t) = 37 \quad \text{и} \quad \log_y t + \log_t y = 5.$$

Найдите  $\log_x z + \log_z x$ .

14

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Положительные числа  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 3 от этих чисел равна 10. Найдите эти числа, если  $\log_3 b_1 \cdot \log_3 b_5 = 3$ .

27, 3, 3, 3, 3

**19.** (ММО, 2015, 11) Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

□