Исследование функций

Задача 1. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 8*) На координатной плоскости есть точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y(x+1) = x^2 - 1$. Например, одна из них — точка с координатами $(1, 0)$. Изобразите *все* точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

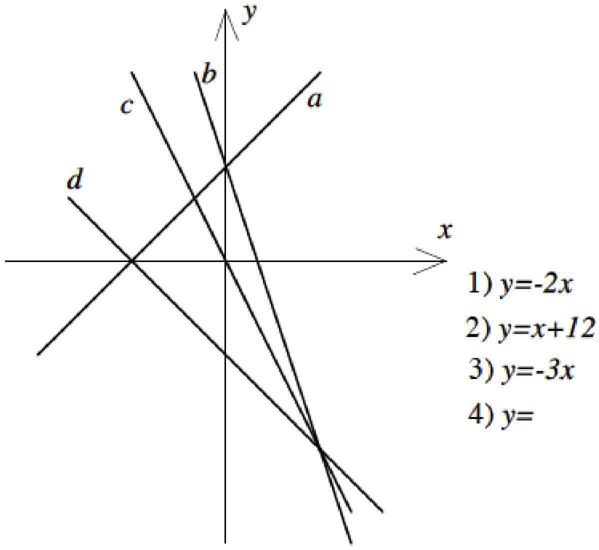
Пара прямых

Задача 2. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10*) Постройте график функции $y = \dfrac{x^2}{|x|}$.

Задача 3. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 11*) Постройте график функции $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

Задача 4. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 10–11*) Постройте график функции $y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2$.

Задача 5. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9.3*) Дима начертил графики четырёх линейных функций на координатной плоскости, но забыл отметить единичные отрезки. Когда он переписывал задание в тетрадь, то отвлекся и не дописал уравнения, задающие функции под номерами 3 и 4. Найдите эти уравнения. Ответ обоснуйте.



Задача 6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Будем называть *колебанием* функции разницу между её наибольшим и наименьшим значением. Каким может быть максимальное колебание функции $f(x)g(x)$, если известно, что отрезок $[-8; 4]$ является множеством значений функции $f(x)$, а отрезок $[-2; 6]$ является множеством значений функции $g(x)$?

72

Задача 7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Отрезок $[-3;9]$ является множеством значений функции $f(x)$, отрезок $[-1;6]$ является множеством значений функции $g(x)$. На какую наибольшую величину может отличаться наибольшее значение функции $f(x)g(x)$ от наименьшего значения этой функции?

$\boxed{72}$

Задача 8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Пусть $f(x) = x^2 + px + q$, где p, q — некоторые коэффициенты. На какую наименьшую величину может отличаться наибольшее значение функции $g(x) = |f(x)|$ от наименьшего значения этой функции на отрезке $[2;6]$?

$\boxed{\text{На } 2}$

Задача 9. (*«Ломоносов», 2017, 9*) Про функцию $y = f(x)$ известно, что она определена и непрерывна на всей числовой прямой, нечётна и периодична с периодом 5, а также что $f(-1) = f(2) = -1$. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[1755; 2017]$?

Задача 10. (*«Курчатов», 2016, 10*) Известна сумма четвёртой и пятой степени некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?

Задача 11. (*Моск. матем. регата, 2015, 11*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y, \\ \sin y - \sin z = z - y, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

$\boxed{(\pi,\pi,\pi)}$

Задача 12. (*Моск. матем. регата, 2016, 11*) Решите уравнение

$$2\sin\frac{\pi x}{2} - 2\cos\pi x = x^5 + 10x - 54.$$

$\boxed{2}$

Задача 13. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.5*) Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел, причём для любого x выполняются равенства $f(x+2) = f(2-x)$ и $f(x+7) = f(7-x)$. Докажите, что $f(x)$ — периодическая функция.

Задача 14. (*ММО, 1994, 11.3*) В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y = x^4$, опускают вишенку — шар радиуса r. При каком наибольшем r шар коснется нижней точки дна? (Другими словами, каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y \geqslant x^4$ и содержащего начало координат?)

$\boxed{\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}}$

Задача 15. (*Всеросс., 1996, финал, 11.2*) Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.

Задача 16. (*ММО, 1979, 10.3*) Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0;1]$ и в каждой точке этого отрезка имеет первую и вторую производные. Известно, что $f(0) = f(1) = 0$ и что $|f''(x)| \leqslant 1$ на всём отрезке. Какое наибольшее значение может принимать максимум функции f для всевозможных функций, удовлетворяющих этим условиям?

$\boxed{\frac{1}{8}}$

Задача 17. (*ММО, 1986, 10.5*) Найдите минимум по всем α, β максимума функции

$$y = |\cos x + \alpha \cos 2x + \beta \cos 3x| \,.$$

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$