Иррациональные уравнения и системы

Содержание

Мы называем уравнение *иррациональным*, если оно содержит переменную под знаком корня (квадратного, кубического и т. д.). Иррациональные уравнения обладают определённой спецификой[1]; методам их решения и посвящена данная статья.

1 Учёт ОДЗ

Напомним, что *область допустимых значений* (сокращённо ОДЗ) уравнения есть множество значений переменной, при которых обе части данного уравнения имеют смысл.

В большинстве ситуаций специально искать ОДЗ нет необходимости — нужно лишь следить за равносильностью осуществляемых преобразований. Однако в некоторых иррациональных уравнениях дело не доходит до каких-либо специфических приёмов; достаточно оказывается посмотреть на ОДЗ.

Задача 1. (*МГУ, социологич. ф-т, 1997*) Решить уравнение

$$\sqrt{5x-10}=2-x.$$

Решение. Найдём ОДЗ: $5x-10\geqslant 0$, то есть $x\geqslant 2$. При таких значениях x правая часть нашего уравнения неположительна, а левая — неотрицательна. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части обращаются в нуль одновременно, то есть при $x=2$.

Ответ: 2.

Задача 2. Решить уравнение

$$\sqrt{6x-x^2-8}+\sqrt{x-4}=x^2-7x+12.$$

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x-x^2-8\geqslant 0, \\ x-4\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\leqslant x\leqslant 4, \\ x\geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Таким образом, ОДЗ нашего уравнения состоит из одной-единственной точки, и остаётся лишь проверить её. Подставляем $x=4$ в уравнение и убеждаемся, что данное число действительно является корнем.

Ответ: 4.

[1] Говоря о специфике, мы, конечно, исключаем случаи вроде $\sqrt{x^2}=1$; такое уравнение есть обычное уравнение с модулем $|x|=1$.

2 Равносильные преобразования

Мы переходим к рассмотрению стандартных видов иррациональных уравнений. Здесь, как мы уже говорили, предварительный поиск ОДЗ оказывается ненужным шагом; наиболее эффективно эти задачи решаются с помощью соответствующих равносильных переходов.

Уравнения вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

Начнём с примера. Пусть надо решить уравнение

$$\sqrt{x} = \sqrt{2x+1}.$$

В силу монотонности функции $\sqrt{x}$ подкоренные выражения должны быть равны: $x = 2x+1$, откуда $x = -1$. Однако подстановка этого значения x в уравнение даёт отрицательные числа под знаком квадратного корня; следовательно, $x = -1$ не является корнем данного уравнения, и потому оно не имеет решений.

Теперь рассмотрим общую ситуацию. Пусть имеется уравнение

$$\sqrt{A} = \sqrt{B},$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную (как правило, многочлены). Тогда, во-первых, подкоренные выражения должны быть равны: $A = B$. Во-вторых, оба подкоренных выражения должны быть неотрицательными; но в силу их равенства достаточно потребовать неотрицательности одного из них. Таким образом, имеем:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B, \\ A \geqslant 0 \end{cases}$$

или

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B, \\ B \geqslant 0. \end{cases}$$

При этом естественно требовать неотрицательности того выражения, которое устроено проще.

Задача 3. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 3x - 11} = \sqrt{2x^2 - 4x - 5}.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 11 = 2x^2 - 4x - 5, \\ 2x^2 - 4x - 5 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ 2x^2 - 4x - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что x_1 не удовлетворяет неравенству системы, а x_2 удовлетворяет ему. Следовательно, только x_2 является корнем исходного уравнения.

Ответ: -3.

Ну а теперь представьте себе, что вы начали решение с поиска ОДЗ. Представили? ;-)

В данном уравнении было по большому счёту безразлично, неотрицательности какого из двух подкоренных выражений требовать. А вот в следующей задаче это окажется существенно.

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{x - 1}.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 4 = x - 1, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 5 = 0, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{29}}{2}.$$

Число x_1 удовлетворяет неравенству системы очевидным образом и потому является корнем исходного уравнения. Проверим x_2:

$$x_2 - 1 = \frac{7 - \sqrt{29}}{2} - 1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{29}}{2} < 0.$$

Следовательно, x_2 не является корнем исходного уравнения.

Заметьте, что проверить неотрицательность выражения $x - 1$ (при таких-то x_1 и x_2!) оказывается существенно легче, чем делать это для квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 4$.

Ответ: $\frac{7+\sqrt{29}}{2}$.

Уравнения вида $A\sqrt{B} = 0$

Рассмотрим уравнение

$$A\sqrt{B} = 0,$$

где A и B — выражения, содержащие переменную (как правило, многочлены). Тут возможны два случая: 1) $B = 0$, и при этом A определено; 2) $A = 0$, и при этом $B \geqslant 0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$A\sqrt{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B = 0, \\ A \text{ определено}, \end{cases} \\ \begin{cases} A = 0, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{1}$$

Задача 5. (*МГУ, мехмат, 1980*) Решить уравнение

$$(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0.$$

Решение. В силу (1) имеем:

$$(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + 1 \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Первое уравнение совокупности даёт $x = -1$. Решением системы служит $x = 2$.

Ответ: -1, 2.

Уравнения вида $\sqrt{A} = B$

Снова начнём с примера. Решим уравнение

$$\sqrt{2-x} = x.$$

Возведём обе части в квадрат:

$$2 - x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = -2.$$

Поочерёдно подставляя x_1 и x_2 в наше уравнение, убеждаемся, что x_1 является его корнем, а x_2 — не является (получается неверное числовое равенство $2 = -2$).

Почему в процессе решения возник лишний корень x_2? Причина проста — мы возвели обе части уравнения в квадрат, в результате чего неверное числовое равенство $2 = -2$ стало верным равенством $4 = 4$. Возведение в квадрат — *неравносильное* преобразование, которое может приводить к появлению лишних корней. Эти лишние корни нужно затем исключить — либо непосредственной проверкой (что не всегда удобно), либо с помощью некоторого дополнительного условия[2].

Перейдём к рассмотрению общей ситуации. По определению арифметического квадратного корня, $\sqrt{a}$ есть такое число $b \geqslant 0$, что $a = b^2$. Поэтому уравнение $\sqrt{A} = B$ равносильно уравнению $A = B^2$ при дополнительном условии неотрицательности B:

$$\sqrt{A} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B^2, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Задача 6. (*МГУ, физический ф-т, 1998*) Решить уравнение

$$\sqrt{3x - x^2 - 2} = 2x - 3.$$

Решение. В силу эквивалентности (2) имеем:

$$\sqrt{3x - x^2 - 2} = 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - x^2 - 2 = (2x-3)^2, \\ 2x - 3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение системы (3) приводится к виду

$$5x^2 - 15x + 11 = 0$$

и имеет корни

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{5}}{10}, \quad x_2 = \frac{15 - \sqrt{5}}{10}.$$

Неравенство системы (3) имеет вид

$$x \geqslant \frac{3}{2}.$$

Легко видеть, что

$$x_1 > \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \quad x_2 < \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

[2]Возводя обе части уравнения в квадрат, мы переходим к уравнению, которое не равносильно исходному, но является его *следствием*. Уравнение-следствие среди своих корней имеет все корни исходного уравнения и, возможно, ещё какие-то корни.

Решая уравнение-следствие, мы получаем *необходимые* условия для корней исходного уравнения. После этого нужно проверить, какие из этих условий являются к тому же *достаточными*. Если вы не очень хорошо владеете данной терминологией, почитайте статью «Необходимые и достаточные условия».

Следовательно, корнем исходного уравнения является только x_1.

Ответ: $\frac{15+\sqrt{5}}{10}$.

Замечание 1. Обратите внимание, что для обнаружения лишнего корня гораздо легче проверить выполнение неравенства $2x-3 \geqslant 0$, чем непосредственно подставлять иррациональные x_1 и x_2 в исходное уравнение.

Замечание 2. Распространённое заблуждение новичка состоит в том, чтобы «начать с нахождения ОДЗ», то есть с решения неравенства $3x-x^2-2 \geqslant 0$. В данном случае это совершенно бессмысленно. Ведь подкоренное выражение $3x-x^2-2$ приравнивается в силу (3) к полному квадрату $(2x-3)^2$ и потому автоматически оказывается неотрицательным.

Уравнения вида $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$

Наличие двух радикалов в уравнениях вида $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$ приводит к необходимости двукратного возведения в квадрат.

Задача 7. (*МГУ, ИСАА, 1991*) Решить уравнение

$$\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1.$$

Решение. Перед первым возведением в квадрат полезно переписать уравнение в виде

$$\sqrt{3x-5} = 1 + \sqrt{4-x}\,. \tag{4}$$

Почему это полезно? Дело в том, что левая часть исходного уравнения может быть отрицательной, и если мы захотим возводить в квадрат исходное уравнение, то придётся накладывать дополнительное условие неотрицательности левой части: $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} \geqslant 0$. А вот обе части уравнения (4) неотрицательны, поэтому возведение уравнения (4) в квадрат будет равносильным преобразованием:

$$\sqrt{3x-5} = 1 + \sqrt{4-x} \quad \Leftrightarrow \quad 3x-5 = \left(1+\sqrt{4-x}\,\right)^2;$$

после очевидных преобразований приходим к уравнению

$$\sqrt{4-x} = 2x-5.$$

Данное уравнение, равносильное исходному, в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} 4-x = (2x-5)^2, \\ 2x-5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение данной системы приводится к виду $4x^2-19x+21=0$ и имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{7}{4}$. Неравенству системы удовлетворяет лишь x_1.

Ответ: 3.

Предваряя следующий пункт «Замена переменной», укажем здесь ещё один способ решения данного уравнения. Делаем *двойную* замену

$$u = \sqrt{3x-5}\,, \quad v = \sqrt{4-x}\,.$$

Зачем нам две переменных вместо одной? Дело в том, что наряду с исходным уравнением, которое в этих обозначениях имеет вид $u-v=1$, существует ещё одно простое соотношение между u и v, не содержащее переменной x. А именно, заметим, что

$$u^2 + 3v^2 = 3x-5+3(4-x) = 7.$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + 3v^2 = 7. \end{cases}$$

Выражаем u из первого уравнения: $u = v + 1$, и подставляем во второе; получим

$$2v^2 + v - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = 1,\ v_2 = -\frac{3}{2}\,.$$

Значение v_2 отпадает ввиду условия $v \geqslant 0$, а значение v_1 приводит к уравнению $\sqrt{4-x} = 1$, откуда $x = 3$.

Обратите внимание, что нам не понадобилось значение u. Его, разумеется, можно найти ($u = 2$), и оно, очевидно, приводит к тому же самому значению $x = 3$.

3 Замена переменной

В некоторых задачах бывает полезно сделать замену переменной, обозначив новой буквой имеющийся *корень* из некоторого выражения.

Задача 8. (*МГУ, социологич. ф-т, 1999*) Решить уравнение

$$\sqrt{y-2} = 7 - y.$$

Решение. Мы уже умеем решать такие уравнения с помощью равносильного перехода (2). Но здесь возможен и другой способ. Обозначим $t = \sqrt{y-2}$; тогда $t^2 = y - 2$ и $y = 2 + t^2$, причём $t \geqslant 0$. Наше уравнение переписывается в виде:

$$t = 7 - (2 + t^2) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\,,\ t_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\,.$$

Условию $t \geqslant 0$ удовлетворяет лишь число t_1. Поэтому обратная замена:

$$y = 2 + t_1^2 = 2 + \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{15-\sqrt{21}}{2}\,.$$

Ответ: $\frac{15-\sqrt{21}}{2}$.

Отметим, что характерной особенностью данного способа является отсечение лишних корней ещё «на этапе переменной t»: корень t_2 оказался лишним, будучи отрицательным.

Задача 9. (*МГУ, ВМК, 1989*) Решить уравнение

$$8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x = 33 + 4x^2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$4x - 4x^2 + 16\sqrt{3 + 4x - 4x^2} = 33 \quad \Leftrightarrow \quad \left(3 + 4x - 4x^2\right) + 16\sqrt{3 + 4x - 4x^2} - 36 = 0.$$

Замена $t = \sqrt{3 + 4x - 4x^2}$ приводит к квадратному уравнению:

$$t^2 + 16t - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = -18,\ t_2 = 2.$$

Поскольку $t \geqslant 0$, число t_1 отпадает. Обратная замена:

$$\sqrt{3+4x-4x^2} = t_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-4x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 10. (*МФТИ, 2001*) Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2-12x+46} - \sqrt{x^2-6x+22} = 3.$$

Решение. Здесь, как и в предыдущем пункте, успешно работает двойная замена:

$$u = \sqrt{2x^2-12x+46}\,, \quad v = \sqrt{x^2-6x+22}\,.$$

В самом деле,

$$u^2 - 2v^2 = 2x^2-12x+46-2(x^2-6x+22) = 2$$

(переменная x исчезла из данной разности), так что мы имеем систему

$$\begin{cases} u - v = 3, \\ u^2 - 2v^2 = 2. \end{cases}$$

Выражая u из первого уравнения и подставляя во второе, получим квадратное уравнение

$$v^2 - 6v - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = -1,\ v_2 = 7.$$

Число v_1 отпадает ввиду условия $v \geqslant 0$, а обратная замена $\sqrt{x^2-6x+22} = 7$ даёт решения $x = 9$ и $x = -3$.

Ответ: 9, -3.

4 Умножение на сопряжённое

Выражения $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ и $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ называются *сопряжёнными*. Произведение сопряжённых выражений, будучи разностью квадратов, не содержит знаков квадратного корня.

Задача 11. (*МГУ, геологич. ф-т, 1985*) Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}\,.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(\sqrt{3x^2+2x+1} - \sqrt{3x^2-1}\right) + \left(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-x+1}\right) = 0.$$

Выражения в обеих скобках умножим и разделим на сопряжённые (которые не обращаются в нуль ни при каких значениях x):

$$\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+1} - \sqrt{3x^2-1}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{3x^2-1}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{3x^2-1}} +$$

$$+ \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2-x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(3x^2+2x+1)-(3x^2-1)}{\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{3x^2-1}} + \frac{(x^2+2x+4)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2-x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x+2}{\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{3x^2-1}} + \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2-x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{3x^2-1}} + \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2-x+1}}\right) = 0.$$

Допустимыми являются те значения x, которые удовлетворяют неравенству $3x^2-1\geqslant 0$ (остальные подкоренные выражения, как легко проверить, положительны при любых x). При всех допустимых значениях x выражение в скобках положительно, поэтому наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1=0, \\ 3x^2-1\geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=-1.$$

Ответ: -1.

5 Системы уравнений

При решении иррациональных систем используется весь известный вам арсенал средств: замены переменных и различные преобразования уравнений.

Задача 12. (*МФТИ, 2002*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1, \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3. \end{cases}$$

Решение. Делаем замену

$$u=\sqrt{11x-y}\,, \quad v=\sqrt{y-x}\,.$$

Замечаем при этом, что

$$6y-26x=4(y-x)-2(11x-y)=4v^2-2u^2.$$

Таким образом, система переписывается в виде

$$\begin{cases} u-v=1, \\ 7v+4v^2-2u^2=3. \end{cases}$$

Выражаем u из первого уравнения: $u=v+1$, и подставляем во второе; приходим к уравнению

$$2v^2+3v-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad v_1=1,\ v_2=-\frac{5}{2}\,.$$

Значение v_2 отпадает ввиду условия $v\geqslant 0$, а значению $v_1=1$ соответствует $u=2$. Обратная замена:

$$\begin{cases} \sqrt{11x-y}=2, \\ \sqrt{y-x}=1, \end{cases}$$

откуда $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Задача 13. (*МФТИ, 2003*) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x-1=\dfrac{y}{x}+2\sqrt{x+y}\,, \\ \sqrt{y+\sqrt{x+y}}=y-3x-6. \end{cases} \tag{5}$$

Решение. Действуем при следующих ограничениях:

$$x\neq 0, \quad x+y\geqslant 0, \quad y+\sqrt{x+y}\geqslant 0. \tag{6}$$

Преобразуем первое уравнение, умножая его на x:

$$3x^2 - x = y + 2x\sqrt{x+y} \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2 = x^2 + 2x\sqrt{x+y} + (x+y) \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 4x^2 = \left(x + \sqrt{x+y}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x - \sqrt{x+y}\right)\left(3x + \sqrt{x+y}\right) = 0.$$

Соответственно, имеем два случая.

1. Пусть сначала $\sqrt{x+y} = x$; тогда $\sqrt{y + \sqrt{x+y}} = \sqrt{y+x} = x$, и возникает дополнительное ограничение
$$x \geqslant 0. \tag{7}$$
При ограничениях (6) и (7) система (5) равносильна системе
$$\begin{cases} 3x^2 - x = y + 2x \cdot x, \\ x = y - 3x - 6 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2 - x = y, \\ 4x + 6 = y, \end{cases}$$
что приводит к уравнению $x^2 - 5x - 6 = 0$ с корнями $x_1 = -1$ и $x_2 = 6$. Корень x_1 отпадает ввиду ограничения (7), а значению x_2 отвечает $y = 30$. Пара $(6, 30)$ удовлетворяет ограничениям (6) и потому является решением исходной системы.

2. Пусть теперь $\sqrt{x+y} = -3x$; это даёт дополнительное к (6) ограничение
$$x \leqslant 0. \tag{8}$$
Второе уравнение системы (5) приобретает вид
$$\sqrt{y - 3x} = y - 3x - 6,$$
что является квадратным уравнением относительно переменной $t = \sqrt{y-3x}$:
$$t^2 - t - 6 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t_1 = -2,\ t_2 = 3.$$
Значение t_1 отпадает ввиду $t \geqslant 0$, а значение t_2 даёт уравнение $y - 3x = 9$.
Таким образом, при ограничениях (6) и (8) система (5) равносильна системе
$$\begin{cases} 3x^2 - x = y + 2x \cdot (-3x), \\ y - 3x = 9 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 9x^2 - x = y, \\ y = 3x + 9, \end{cases}$$
что приводит к уравнению
$$9x^2 - 4x - 9 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = \frac{2 + \sqrt{85}}{9}\,,\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{85}}{9}\,.$$
Значение x_1 отпадает ввиду ограничения (8), а отрицательному значению x_2 отвечает $y = \frac{29 - \sqrt{85}}{3}$. Пара $\left(\frac{2-\sqrt{85}}{9}, \frac{29-\sqrt{85}}{3}\right)$ удовлетворяет ограничениям (6) и потому является решением исходной системы.

Ответ: $(6, 30)$; $\left(\frac{2-\sqrt{85}}{9}, \frac{29-\sqrt{85}}{3}\right)$.

Задача 14. (*«Физтех», 2010*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{25 - y^2} = 7, \\ \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{25 - y^2} = \dfrac{1}{7}(y^2 - 2x^2 + 2x + 3). \end{cases} \tag{9}$$

Решение. Вначале проясним логику дальнейших действий. Если в уравнении $A = B$ обе части не обращаются в нуль (а именно таково первое уравнение нашей системы), то имеет место эквивалентность

$$\begin{cases} A = B, \\ C = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ AC = BD \end{cases}$$

(второе уравнение заменили произведением уравнений). В самом деле, очевидно, что любое решение левой системы является в то же время и решением правой системы; вместе с тем, всякое решение правой системы служит и решением левой, поскольку второе уравнение правой системы можно сократить на ненулевой множитель $A = B$.

Итак, перемножаем уравнения системы (9):

$$y^2 - x^2 = y^2 - 2x^2 + 2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Теперь достаточно поочерёдно подставить полученные значения x в первое уравнение исходной системы (9) и найти соответствующие значения y.

Ответ: $\left(-1, \pm 2\sqrt{7\sqrt{6} - 12}\right)$; $(3, \pm 4)$.

Задача 15. (*«Физтех», 2009*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt{\dfrac{9}{4}x^2 - 4y^2}} = \dfrac{3}{4} + x, \\ \sqrt{\dfrac{15}{16} + 3x + \dfrac{8}{3}y} = 1 - \dfrac{8}{3}y. \end{cases} \tag{10}$$

Решение. Сразу делаем замену $t = \frac{8}{3}y$ (это несколько упростит дальнейшие выкладки):

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt{\dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{9}{16}t^2}} = \dfrac{3}{4} + x, \\ \sqrt{\dfrac{15}{16} + 3x + t} = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \sqrt{\dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{9}{16}t^2} = \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{2}x + x^2, \\ \dfrac{3}{4} + x \geqslant 0, \\ \dfrac{15}{16} + 3x + t = 1 - 2t + t^2, \\ 1 - t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{9}{16}t^2} = \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{2}x, \\ 3x = \dfrac{1}{16} - 3t + t^2, \\ x \geqslant -\dfrac{3}{4}, \\ t \leqslant 1. \end{cases} \tag{11}$$

Первое уравнение системы (11) умножим на $\frac{4}{3}$:

$$\sqrt{4x^2 - t^2} = \frac{3}{4} + 2x,$$

и возведём в квадрат, что после упрощения даст уравнение $-t^2 = \frac{9}{16} + 3x$. Дополнительное ограничение

$$\frac{3}{4} + 2x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -\frac{3}{8}$$

является усилением ограничения $x \geqslant -\frac{3}{4}$. Система (11) таким образом равносильна системе

$$\begin{cases} -t^2 = \dfrac{9}{16} + 3x, \\ 3x = \dfrac{1}{16} - 3t + t^2, \\ x \geqslant -\dfrac{3}{8}, \\ t \leqslant 1. \end{cases} \tag{12}$$

Из первых двух уравнений системы (12) получаем уравнение относительно t:

$$2t^2 - 3t + \frac{5}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{5}{4}, \ t_2 = \frac{1}{4}.$$

Значение t_1 отпадает ввиду последнего ограничения системы (12), а значение t_2 даёт $x = -\frac{5}{24}$ и $y = \frac{3}{32}$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{24}, \frac{3}{32}\right)$.

6 Задачи

Во всех задачах, если не сказано иное, требуется решить уравнение или систему уравнений.

Учёт ОДЗ

1. (*МГУ, социологич. ф-т, 1997*) $\sqrt{-3x+3} = x - 1$.

$\boxed{1}$

2. $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1$.

$\boxed{1}$

Равносильные преобразования

3. а) $\sqrt{x^2 - 7x + 1} = \sqrt{2x^2 - 15x + 8}$; б) $\sqrt{2x^2 + x - 4} = \sqrt{3x + 3}$.

$\boxed{\text{а) } 7; \text{ б) } \frac{1+\sqrt{15}}{2}}$

4. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2006*) $\sqrt{x^4 - 10x^2 + 25} = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$.

$\boxed{\pm\sqrt{\frac{7}{2}}}$

5. (*МГУ, мехмат, 1980*) $(x^2 + x - 6)\sqrt{x+1} = 0$.

$\boxed{-1, 2}$

6. (*МГУ, экономич. ф-т, 1986*) $\sqrt{3x+4}\,(9x^2 + 21x + 10) = 0$.

$\boxed{-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}}$

7. (*МГУ, геологич. ф-т, 1983*) $(x+1)\sqrt{x^2 - 3x - 6} = 2x + 2$.

$\boxed{-2, 5}$

8. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1997*) $x = \sqrt{8x+9}$.

$\boxed{9}$

9. (*МГУ, географич. ф-т, 1993*) $\sqrt{13-2x} = 5 - x$.

$\boxed{2}$

10. (*МГУ, геологич. ф-т, 1996*) $\sqrt{3x-5} = x - 11$.

$\boxed{18}$

11. (*МГУ, ИСАА, 1997*) $\sqrt{3}(x+2) - \sqrt{9+2x} = 0$.

$\boxed{-\frac{1}{3}}$

12. (*МГУ, географич. ф-т, 2000*) $\sqrt{3x+2} = 2x - 4$.

$\boxed{\frac{19+\sqrt{137}}{8}}$

13. (*МГУ, экономич. ф-т, 2003*) $\sqrt{5+8x-4x^2} = 4x - 1$.

$\boxed{1}$

14. (*МГУ, физический ф-т, 1988*) $\sqrt{4-6x-x^2} = x + 4$.

$\boxed{-1}$

15. (*МГУ, географич. ф-т, 1982*) $x + \sqrt{2x^2-14x+13} = 5$.

$\boxed{-2}$

16. (*МГУ, ф-т психологии, 1996*) $\sqrt{2x^2-21x+4} = 2 - 11x$.

$\boxed{0}$

17. (*МГУ, географич. ф-т, 1999*) $\sqrt{2x^2-8x+5} = x - 2$.

$\boxed{2+\sqrt{3}}$

18. (*МГУ, физический ф-т, 1985*) $\sqrt{x^4-2x-5} = 1 - x$.

$\boxed{-\sqrt{3}}$

19. (*МГУ, ФНМ, 2001*) $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

20. (*МГУ, ВШБ, 2003*) $22x^2 + 10x = \sqrt{1276x^3 + 364x^2}$.

$\boxed{0,\ 2}$

21. (*МГУ, физический ф-т, 1999*) $\sqrt{x+2}\,\sqrt{2x+1} = x + 4$.

$\boxed{\frac{3+\sqrt{65}}{2}}$

22. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1998*) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=1.$

$\boxed{\frac{7}{9}}$

23. (*МГУ, ф-т психологии, 2001*) $\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}\,.$

$\boxed{\frac{6\pm5\sqrt{3}}{2}}$

24. (*МГУ, экономич. ф-т, 1982*) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}\,.$

$\boxed{3}$

25. (*МГУ, социологич. ф-т, 2003*) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x+7}\,.$

$\boxed{3}$

26. (*МГУ, физический ф-т, 2007*) $\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x-1}\,.$

$\boxed{3}$

27. (*МГУ, физический ф-т, 2000*) $\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3x+1}\,.$

$\boxed{\frac{-1+\sqrt{57}}{4}}$

28. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2004*) $\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-x-6}=-\sqrt{2x^2+4x-2}\,.$

$\boxed{-4}$

29. (*«Физтех», 2013, 10–11*) Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt{3-x}=2.$

$\boxed{-16}$

Замена переменной

30. (*МГУ, филологич. ф-т, 2007*) $-x-\sqrt{-x}=10.$

$\boxed{-25}$

31. (*МГУ, МШЭ, 2006*) $\sqrt{x+3}=9-x.$

$\boxed{6}$

32. (*МГУ, химический ф-т, 1993*) $\sqrt{x+4}=x+2.$

$\boxed{0}$

33. (*МГУ, химический ф-т, 1998*) $7-x=3\sqrt{5-x}\,.$

$\boxed{1,\ 4}$

34. (*МГУ, социологич. ф-т, 1999*) $\sqrt{x-1}=6-x.$

$\boxed{\frac{13-\sqrt{21}}{2}}$

35. (*МГУ, геологич. ф-т, 1983*) $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23).$

$\boxed{-1,\ 4}$

36. (*МГУ, экономич. ф-т, 1983*) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31.$

$\boxed{\pm 5}$

37. (*МГУ, геологич. ф-т, 1994*) $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4 - 3x.$

$\boxed{-4,\ 1}$

38. (*МГУ, экономич. ф-т, 2006*) $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7.$

$\boxed{-\frac{1}{2};\ 1}$

39. (*МГУ, физический ф-т, 1999*) $\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}\,.$

$\boxed{\sqrt{5}}$

40. (*«Ломоносов», 2017, 10–11*) $\sqrt{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} + \sqrt{2}\,.$

$\boxed{\frac{257}{16}}$

41. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11*) $7x^2 + 20x - 14 = 5\sqrt{x^4 - 20x^2 + 4}\,.$

$\boxed{\frac{-5-\sqrt{33}}{2},\ \frac{-10-\sqrt{118}}{3}}$

42. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Решите уравнение

$$\left|x\sqrt{1-x^2} + x\right| = \sqrt{1+x^2}\,.$$

$\boxed{\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

Двойная замена

43. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1998*) $\sqrt{x+1} - \sqrt{5x-6} = 1.$

$\boxed{\frac{5}{4}}$

44. (*МФТИ, 2001*) $\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2.$

$\boxed{6,\ -2}$

45. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11*) $\sqrt[3]{15x + 1 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 4.$

$\boxed{0;\ 2;\ 13;\ 15}$

46. (*МГУ, географич. ф-т, 1995*) $\sqrt[4]{x - \frac{3}{2}} + \sqrt[4]{10 - x} = 2.$

$\boxed{\frac{23 \pm 12\sqrt{2}}{4}}$

47. (*МГУ, химический ф-т, 2003*)

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\cdot\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)=8.$$

$\boxed{0}$

48. (*МГУ, ИСАА, 2005*) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{(x+2)^3}\,.$

$\boxed{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}$

49. (*МГУ, химический ф-т, 2002*) При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\sqrt{-x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+a}=2x^2+3x+2-a.$$

$\boxed{\text{Если } a \geqslant 0, \text{ то } x=-1\pm\sqrt{a}; \text{ если } a<0, \text{ то решений нет}}$

Умножение на сопряжённое

50. (*МГУ, геологич. ф-т, 1985*)

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}\,.$$

$\boxed{2}$

51. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*)

$$\frac{27x-24}{2x+\sqrt{4x^2-3}}-\frac{36x-32}{\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2+1}}=9x^2-26x+16.$$

$\boxed{\frac{8}{9};\ \frac{2+\sqrt{13}}{3}}$

Системы

52. (*МГУ, ф-т психологии, 1981*)

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2,\\ x^5\cdot\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$$

$\boxed{(4,2);\ \left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)}$

53. (*МГУ, геологич. ф-т, 1995*)

$$\begin{cases} x^3\cdot\sqrt{x-y}=0,\\ 2y^2+y=21+2xy. \end{cases}$$

$\boxed{(21,21);\ \left(0,-\frac{7}{2}\right)}$

54. (*МГУ, мехмат, 1980*)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+4xy-3y^2} = x+1, \\ x-y=1. \end{cases}$$

$\boxed{(2, 1)}$

55. (*МГУ, химический ф-т, 1977*)

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)}$

56. (*МГУ, геологич. ф-т, 1999*)

$$\begin{cases} 4x+5y = \sqrt{16x^2-25y^2}, \\ x^2+6x-7=0. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 0); \left(1, -\frac{4}{5}\right); \left(-7, \frac{28}{5}\right)}$

57. (*МГУ, ВШБ, 2004*)

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x+y-20=0. \end{cases}$$

$\boxed{(26, -6); (-9, 29)}$

58. (*МГУ, химический ф-т, 1991*)

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy-y+6x=7. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 1); \left(\frac{5}{2}, -2\right)}$

59. (*МГУ, физический ф-т, 2002*)

$$\begin{cases} 5\sqrt{2x^2-y^4} = 4x-3y, \\ 4\sqrt{2x^2-y^4} = 3x-2y. \end{cases}$$

$\boxed{(0, 0); \left(2\sqrt{7}, \sqrt{7}\right)}$

60. (*МГУ, физический ф-т, 2006*)

$$\begin{cases} 3x+y+\sqrt{9x^2-y^2} = 6, \\ y\sqrt{(3x+y)(3x-y)} = 2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{8}{9}, \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}\right)}$

61. (*«Физтех», 2016, 9–11*)

$$\begin{cases} 2x+\sqrt{2x+3y}-3y=5, \\ 4x^2+2x+3y-9y^2=32. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{17}{4}, \frac{5}{2}\right)}$

62. (*«Физтех», 2016, 9–11*) Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y-2\sqrt{xy}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}+2=0, \\ 3x^2y^2+y^4=84. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{1}{3}, 3\right);\ \left(\sqrt[4]{\frac{21}{76}}, 2\sqrt[4]{\frac{84}{19}}\right)}$

63. (*МФТИ, 2002*)

$$\begin{cases} \sqrt{x-4y}-2\sqrt{3y+x}=1, \\ 7\sqrt{3y+x}+22y+5x=13. \end{cases}$$

$\boxed{(13, -3)}$

64. (*МФТИ, 2005*)

$$\begin{cases} 1+xy=\dfrac{x^2y^2}{2x-y}+\dfrac{2x-y}{xy}, \\ \dfrac{2x-y}{xy}\sqrt{2x-y}=4-3xy. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 1);\ \left(-\frac{1}{2}, -2\right)}$

65. (*МФТИ, 2005*)

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{\sqrt{x-2y}}=\dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{\sqrt{x-2y}}{xy}, \\ xy\sqrt{\dfrac{xy}{x-2y}}=2-\sqrt{x-2y}\,. \end{cases}$$

$\boxed{(-1, -1);\ \left(2, \frac{1}{2}\right)}$

66. (*«Ломоносов», 2013, 9*)

$$\begin{cases} x^2=2\sqrt{y^2+1}, \\ y^2=2\sqrt{z^2-1}-2, \\ z^2=4\sqrt{x^2+2}-6. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right);\ \left(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right);\ \left(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right);\ \left(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right)}$

67. (*МФТИ, 2003*)

$$\begin{cases} 1-5y=\dfrac{x}{y}-6\sqrt{x-y}\,, \\ \sqrt{x-\sqrt{x-y}}=x-5y-6. \end{cases}$$

$\boxed{(42,6);\ \left(\frac{47+\sqrt{229}}{5},\ \frac{2+\sqrt{229}}{25}\right)}$

68. (*«Физтех», 2014*)

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-4xy=4x-2y+3, \\ \sqrt{6x-3y}=2-xy. \end{cases}$$

$\boxed{(1,-1);\ \left(\frac{1}{2},-2\right)}$

69. (*«Физтех», 2008*)

$$\begin{cases} x+\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}=\dfrac{42}{x-y}\,, \\ xy-4x=9. \end{cases}$$

$\boxed{(9,5);\ \left(2-\sqrt{62},\ \frac{214-9\sqrt{62}}{58}\right)}$

70. (*«Физтех», 2011*)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-\dfrac{2}{3}y}=y-x, \\ \dfrac{9}{4}y^2+x^3=2x+1. \end{cases}$$

$\boxed{(-1,0);\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right);\ \left(\frac{\sqrt{113}-9}{2},\ \frac{3\sqrt{113}-29}{3}\right)}$

71. (*«Физтех», 2010*)

$$\begin{cases} \sqrt{25-y^2}-\sqrt{25-x^2}=1, \\ \sqrt{25-y^2}+\sqrt{25-x^2}=x^2-2y^2+2y+3. \end{cases}$$

$\boxed{(\pm 4,3);\ \left(\pm 2\sqrt[4]{6};-1\right)}$

72. (*«Физтех», 2009*)

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{4}{9}x^2+\sqrt{x^2-9y^2}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}x\,, \\ \sqrt{\dfrac{15}{16}-2x-4y}=1+4y. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5}{16};-\frac{1}{16}\right)}$

73. (*«Физтех», 2012*)

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 + 10x + 20y = 0, \\ \sqrt{25 - y(3x + 5y + 10)} + \sqrt{y^2 - 10y + 30} = 5. \end{cases}$$

$\boxed{(-14, 7);\ (-6, 3)}$