Иррациональные уравнения и неравенства

Мы называем уравнение или неравенство *иррациональным*, если оно содержит переменную под *радикалами*, то есть под знаками квадратного, кубического и т. д. корня. Иррациональные уравнения и неравенства обладают определённой спецификой[1]; методам их решения и посвящена данная статья.

Учёт ОДЗ

Напомним, что *область допустимых значений* (сокращённо ОДЗ) уравнения или неравенства есть множество значений переменной, при которых обе части данного уравнения или неравенства имеют смысл.

В любой задаче можно обойтись без поиска (и без упоминания) ОДЗ, так что особой необходимости в этом понятии нет. Но и вреда в нём тоже нет[2]; более того, в отдельных ситуациях нахождение ОДЗ оказывается весьма полезным.

Так, в некоторых иррациональных уравнениях и неравенствах дело не доходит до каких-либо специфических приёмов — достаточно пристального взгляда и учёта ОДЗ.

Задача 1. Решить неравенство: $\sqrt{2-x-x^2}>-1$.

Решение. Квадратный корень может принимать только неотрицательные значения, поэтому данное неравенство выполнено всегда, когда квадратный корень определён. Иными словами, множеством решений данного неравенства служит его ОДЗ:

$$2-x-x^2\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\leqslant x\leqslant 1.$$

Ответ: $[-2;1]$.

Задача 2. (*МГУ, социологич. ф-т, 1997*) Решить уравнение: $\sqrt{5x-10}=2-x$.

Решение. Найдём ОДЗ: $5x-10\geqslant 0$, то есть $x\geqslant 2$. При таких значениях x правая часть нашего уравнения неположительна, а левая — неотрицательна. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части обращаются в нуль одновременно, то есть при $x=2$.

Ответ: 2.

Задача 3. Решить уравнение: $\sqrt{6x-x^2-8}+\sqrt{x-4}=x^2-7x+12$.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases}6x-x^2-8\geqslant 0,\\ x-4\geqslant 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ x\geqslant 4\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=4.$$

Таким образом, ОДЗ нашего уравнения состоит из одной-единственной точки, и остаётся лишь проверить её. Подставляем $x=4$ в уравнение и убеждаемся, что данное число действительно является корнем.

Ответ: 4.

[1]Говоря о специфике, мы, конечно, исключаем случаи вроде $\sqrt{x^2}=1$; такое уравнение есть обычное уравнение с модулем $|x|=1$.

[2]Вред есть в рекомендации «всегда начинать решение с поиска ОДЗ», против которой мы возражаем самым категорическим образом. В данной статье вы увидите массу примеров, где предварительный поиск ОДЗ является порой трудоёмким и в любом случае бессмысленным занятием.

Равносильные преобразования

Мы переходим к рассмотрению стандартных видов иррациональных уравнений и неравенств. Здесь предварительный поиск ОДЗ оказывается, как правило, ненужным шагом; наиболее эффективно эти задачи решаются с помощью соответствующих равносильных переходов.

Уравнения вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

Начнём с примера. Пусть надо решить уравнение

$$\sqrt{x} = \sqrt{2x+1}.$$

В силу монотонности функции $\sqrt{x}$ подкоренные выражения должны быть равны: $x = 2x+1$, откуда $x = -1$. Однако подстановка этого значения x в уравнение даёт отрицательные числа под радикалами; следовательно, $x = -1$ не является корнем данного уравнения, и потому оно не имеет решений.

Теперь рассмотрим общую ситуацию. Пусть имеется уравнение

$$\sqrt{A} = \sqrt{B},$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную. Тогда, во-первых, подкоренные выражения должны быть равны: $A = B$. Во-вторых, оба подкоренных выражения должны быть неотрицательными; но в силу их равенства достаточно потребовать неотрицательности одного из них. Таким образом, имеем:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B, \\ A \geqslant 0 \end{cases}$$

или

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B, \\ B \geqslant 0. \end{cases}$$

При этом естественно требовать неотрицательности того выражения, которое устроено проще.

Задача 4. Решить уравнение: $\sqrt{3x^2 - 3x - 11} = \sqrt{2x^2 - 4x - 5}$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 11 = 2x^2 - 4x - 5, \\ 2x^2 - 4x - 5 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ 2x^2 - 4x - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что x_1 не удовлетворяет неравенству системы, а x_2 удовлетворяет ему. Следовательно, только x_2 является корнем исходного уравнения.

Ответ: -3.

Ну а теперь представьте себе, что вы начали решение с поиска ОДЗ. Представили? ;-)

В данном уравнении было по большому счёту безразлично, неотрицательности какого из двух подкоренных выражений требовать. А вот в следующей задаче это окажется существенно.

Задача 5. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{x - 1}$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 4 = x - 1, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 5 = 0, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{2}\,, \quad x_2 = \frac{7-\sqrt{29}}{2}\,.$$

Число x_1 удовлетворяет неравенству системы очевидным образом и потому является корнем исходного уравнения. Проверим x_2:

$$x_2 - 1 = \frac{7-\sqrt{29}}{2} - 1 = \frac{5-\sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{29}}{2} < 0.$$

Следовательно, x_2 не является корнем исходного уравнения.

Заметьте, что проверить неотрицательность выражения $x-1$ (при таких-то x_1 и x_2!) оказывается существенно легче, чем делать это для квадратного трёхчлена x^2-6x+4.

Ответ: $\frac{7+\sqrt{29}}{2}$.

Неравенства вида $\sqrt{A} < \sqrt{B}$

Рассмотрим неравенство

$$\sqrt{A} < \sqrt{B}\,,$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную. В силу монотонного возрастания функции $\sqrt{x}$ должно быть выполнено неравенство $A < B$; но надо не забыть «подпереть нулём» это неравенство снизу: $0 \leqslant A < B$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$\sqrt{A} < \sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant A < B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A < B, \\ A \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Обратите внимание, что нет нужды заранее решать неравенство $B \geqslant 0$. Выражение B автоматически получается неотрицательным — ведь в силу системы (1) величина B больше неотрицательной величины A. Так что перед нами ещё один пример ненужности заблаговременного нахождения ОДЗ.

Ясно, что эквивалентность (1) сохраняется при замене знака $<$ на $\leqslant$.

Задача 6. Решить неравенство: $\sqrt{2x+4} < \sqrt{x^2+8x-3}\,$.

Решение. В силу (1) имеет место эквивалентность:

$$\sqrt{2x+4} < \sqrt{x^2+8x-3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+4 < x^2+8x-3, \\ 2x+4 \geqslant 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+6x-7 > 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет решения $x < -7$ или $x > 1$. Отсюда легко получаем ответ.

Ответ: $x > 1$.

Уравнения вида $A\sqrt{B} = 0$

Рассмотрим уравнение

$$A\sqrt{B} = 0,$$

где A и B — выражения, содержащие переменную. Тут возможны два случая: 1) $B = 0$, и при этом A определено; 2) $A = 0$, и при этом $B \geqslant 0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$A\sqrt{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B = 0, \\ A \text{ определено}, \end{cases} \\ \begin{cases} A = 0, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{2}$$

Задача 7. (*МГУ, мехмат, 1980*) Решить уравнение: $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

Решение. В силу (2) имеем:

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ \begin{cases} x^2-4=0, \\ x+1 \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности даёт $x=-1$. Решением системы служит $x=2$.

Ответ: -1, 2.

Неравенства вида $A\sqrt{B} \geqslant 0$

Перейдём к рассмотрению неравенства[3]

$$A\sqrt{B} \geqslant 0.$$

Ввиду неотрицательности корня возможны два случая: 1) $B=0$, и при этом A определено; 2) $A \geqslant 0$, и при этом $B>0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$A\sqrt{B} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B=0, \\ A \text{ определено}, \end{cases} \\ \begin{cases} A \geqslant 0, \\ B>0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{3}$$

Задача 8. (*МГУ, ВМК, 1978*) Решить неравенство: $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$.

Решение. В силу (3) имеем:

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0, \\ \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x^2-x-2>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнение совокупности имеет корни -1 и 2. Множество решений квадратного неравенства: $x<-1$ или $x>2$, поэтому множество решений системы есть $x>2$. Объединяя множество $\{-1,2\}$ корней уравнения с множеством решений системы, получаем ответ.

Ответ: $\{-1\} \cup [2;+\infty)$.

Уравнения вида $\sqrt{A}=B$

Снова начнём с примера. Решим уравнение

$$\sqrt{2-x}=x.$$

Возведём обе части в квадрат:

$$2-x=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=1,\ x_2=-2.$$

[3] Мы берём именно случай нестрогого неравенства, так как он чаще встречается в экзаменационной практике; разобравшись в нём, вы без труда напишете правильную эквивалентность для строгого неравенства.

Поочерёдно подставляя x_1 и x_2 в наше уравнение, убеждаемся, что x_1 является его корнем, а x_2 — не является (получается неверное числовое равенство $2 = -2$).

Почему в процессе решения возник лишний корень x_2? Причина проста — мы возвели обе части уравнения в квадрат, в результате чего неверное числовое равенство $2 = -2$ стало верным равенством $4 = 4$. Возведение в квадрат — *неравносильное* преобразование, которое может приводить к появлению лишних корней. Эти лишние корни нужно затем исключить — либо непосредственной проверкой (что не всегда удобно), либо с помощью некоторого дополнительного условия[4].

Перейдём к рассмотрению общей ситуации. По определению арифметического квадратного корня, $\sqrt{a}$ есть такое число $b \geqslant 0$, что $a = b^2$. Поэтому уравнение $\sqrt{A} = B$ равносильно уравнению $A = B^2$ при дополнительном условии неотрицательности B:

$$\sqrt{A} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B^2, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Задача 9. (*МГУ, физический ф-т, 1998*) Решить уравнение: $\sqrt{3x - x^2 - 2} = 2x - 3$.

Решение. В силу эквивалентности (4) имеем:

$$\sqrt{3x - x^2 - 2} = 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - x^2 - 2 = (2x-3)^2, \\ 2x - 3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Первое уравнение системы (5) приводится к виду

$$5x^2 - 15x + 11 = 0$$

и имеет корни

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{5}}{10}, \quad x_2 = \frac{15 - \sqrt{5}}{10}.$$

Неравенство системы (5) имеет вид

$$x \geqslant \frac{3}{2}.$$

Легко видеть, что

$$x_1 > \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \quad x_2 < \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, корнем исходного уравнения является только x_1.

Ответ: $\frac{15+\sqrt{5}}{10}$.

Замечание 1. Обратите внимание, что для обнаружения лишнего корня гораздо легче проверить выполнение неравенства $2x - 3 \geqslant 0$, чем непосредственно подставлять иррациональные x_1 и x_2 в исходное уравнение.

Замечание 2. Распространённое заблуждение новичка — «начать с нахождения ОДЗ», то есть с решения неравенства $3x - x^2 - 2 \geqslant 0$. В данном случае это совершенно бессмысленно. Ведь подкоренное выражение $3x - x^2 - 2$ приравнивается в силу (5) к полному квадрату $(2x-3)^2$ и потому автоматически оказывается неотрицательным.

---

[4] Возводя обе части уравнения в квадрат, мы переходим к уравнению, которое не равносильно исходному, но является его *следствием*. Уравнение-следствие среди своих корней имеет все корни исходного уравнения и, возможно, ещё какие-то корни.

Решая уравнение-следствие, мы получаем *необходимые* условия для корней исходного уравнения. После этого нужно проверить, какие из этих условий являются к тому же *достаточными*. Если вы не очень хорошо владеете данной терминологией, почитайте статью «Необходимые и достаточные условия».

Задача 10. (*МГУ, ИСАА, 1991*) Решить уравнение: $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.

Решение. Чтобы избавиться от двух знаков радикала, придётся два раза возводить обе части уравнения в квадрат. При этом перед первым возведением в квадрат полезно переписать уравнение в виде

$$\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{4-x}\,. \tag{6}$$

Почему это полезно? Дело в том, что левая часть исходного уравнения может быть отрицательной, и если мы захотим возводить в квадрат исходное уравнение, то придётся накладывать дополнительное условие неотрицательности левой части: $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}\geqslant 0$. А вот обе части уравнения (6) неотрицательны, и возведение уравнения (6) в квадрат будет равносильным преобразованием:

$$\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{4-x} \quad\Leftrightarrow\quad 3x-5=\left(1+\sqrt{4-x}\,\right)^2,$$

и после очевидных преобразований приходим к уравнению

$$\sqrt{4-x}=2x-5.$$

Данное уравнение, равносильное исходному, в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} 4-x=(2x-5)^2, \\ 2x-5\geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение данной системы приводится к виду $4x^2-19x+21=0$ и имеет корни $x_1=3$, $x_2=\frac{7}{4}$. Неравенству системы удовлетворяет лишь x_1.

Ответ: 3.

Переходим к иррациональным неравенствам, для решения которых требуется возведение обеих частей в квадрат. Сделаем предварительно два замечания.

1. При решении рассмотренных выше *уравнений* можно в принципе обойтись без равносильных переходов типа (4), так как лишние корни можно отсеять непосредственной поочерёдной проверкой конечного набора корней уравнения-следствия (это бывает сложно технически, но теоретически всегда возможно). Однако в результате возведения в квадрат *неравенства* может появиться бесконечное множество лишних решений, и все их проверить уже не представляется возможным. Поэтому использование равносильных переходов при решении иррациональных неравенств становится жизненной необходимостью.

2. Неравенство можно возводить в квадрат лишь в том случае, когда обе его части неотрицательны:

$$a<b \Leftrightarrow a^2<b^2 \quad \text{при } a,b\geqslant 0.$$

   В противном случае верное неравенство может превратиться в неверное:

$$-3<2 \;\to\; 9<4,$$

   или, наоборот, неверное неравенство может превратиться в верное:

$$2<-3 \;\to\; 4<9.$$

Неравенства вида $\sqrt{A} < B$

Рассмотрим в качестве примера неравенство

$$\sqrt{3-x} < x-1.$$

Если $x-1 \leqslant 0$, то неравенство решений не имеет, поскольку арифметический квадратный корень не может быть меньше неположительного числа.

Если $x-1 > 0$, то обе части неравенства неотрицательны, и мы имеем право возвести неравенство в квадрат:

$$3-x < (x-1)^2,$$

не забыв при этом, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3-x \geqslant 0.$$

Таким образом, имеем равносильный переход:

$$\sqrt{3-x} < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 > 0, \\ 3-x < (x-1)^2, \\ 3-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим: $x \in (2; 3]$.

После этого примера хорошо понятно, что в общем случае имеет место следующая эквивалентность:

$$\sqrt{A} < B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B > 0, \\ A < B^2, \\ A \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Если же неравенство нестрогое, то величина B может быть нулём:

$$\sqrt{A} \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A \leqslant B^2, \\ A \geqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

Задача 11. (*МГУ, геологич. ф-т, 1984*) Решить неравенство: $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant 3x-3$.

Решение. Согласно (8) имеет место эквивалентность:

$$\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant 3x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-3 \geqslant 0, \\ x^2-3x+2 \leqslant (3x-3)^2, \\ x^2-3x+2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решения первого неравенства системы:

$$x \geqslant 1. \tag{9}$$

Второе неравенство системы приводится к виду $8x^2-15x+7 \geqslant 0$ и имеет решения

$$x \leqslant \frac{7}{8} \quad \text{или} \quad x \geqslant 1. \tag{10}$$

Третье неравенство системы имеет решения

$$x \leqslant 1 \quad \text{или} \quad x \geqslant 2. \tag{11}$$

Пересекая множества (9)–(11), получаем ответ: $x = 1$ или $x \geqslant 2$.

Ответ: $\{1\} \cup [2; +\infty)$.

Неравенства вида $\sqrt{A} > B$

Теперь в качестве примера рассмотрим неравенство

$$\sqrt{3-x} > x-1.$$

Пусть сначала $x-1<0$. Поскольку в левой части стоит неотрицательное выражение $\sqrt{3-x}$, множеством решений неравенства в этом случае является ОДЗ: $3-x \geqslant 0$.

Пусть теперь $x-1 \geqslant 0$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, имеем право возвести неравенство в квадрат: $3-x > (x-1)^2$.

Таким образом, имеем эквивалентность:

$$\sqrt{3-x} > x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1<0, \\ 3-x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 3-x > (x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1, \\ x \leqslant 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2-x-2<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением первой системы служит множество $x<1$. Решением второй системы служит множество $1 \leqslant x < 2$. Объединяя эти множества, получаем ответ: $x<2$.

Ясно теперь, что в общем случае имеет место эквивалентность:

$$\sqrt{A} > B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B<0, \\ A \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A > B^2. \end{cases} \end{array}\right. \tag{12}$$

Аналогично в случае нестрого неравенства имеем:

$$\sqrt{A} \geqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B \leqslant 0, \\ A \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} B > 0, \\ A \geqslant B^2. \end{cases} \end{array}\right. \tag{13}$$

Задача 12. (*МГУ, геологич. ф-т, 2001*) Решить неравенство: $\sqrt{x^2-8x+12} \geqslant x-5$.

Решение. Согласно (13) имеем равносильный переход:

$$\sqrt{x^2-8x+12} \geqslant x-5 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-5 \leqslant 0, \\ x^2-8x+12 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-5>0, \\ x^2-8x+12 \geqslant (x-5)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы: $x \leqslant 2$. Решение второй системы: $x \geqslant \frac{13}{2}$. Остаётся объединить эти множества.

Ответ: $(-\infty; 2] \cup \left[\frac{13}{2}; +\infty\right)$.

Обобщённый метод интервалов

Как вы помните, метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств (в которых с нулём сравнивается рациональная функция — отношение двух многочленов). Рассмотрим теперь неравенство (вместо знака $>$ может стоять любой другой знак неравенства)

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \tag{14}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, но не обязательно многочлены (то есть в левой части неравенства (14) стоит не обязательно рациональная функция). При решении подобных неравенств могут помочь те же идеи, что используются в методе интервалов.

Непрерывная функция $f(x)$ может менять знак только в тех точках, в которых она обращается в нуль. Точно так же и непрерывная функция $g(x)$ может менять знак только в своих нулях. Поэтому *обобщённый метод интервалов* состоит в следующем.

1. Находим области определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Берём пересечение этих областей определения; обозначим это пересечение M. Таким образом, функции f и g определены одновременно на множестве M; именно на множестве M мы и решаем неравенство.

2. Находим нули функций $f(x)$ и $g(x)$. Отмечаем эти нули на числовой оси — они разбивают множество M на промежутки.

3. Внутри каждого из найденных промежутков дробь $f(x)/g(x)$ сохраняет знак. Определяем все эти знаки и находим решения неравенства.

Задача 13. (*МГУ, экономич. ф-т, 1988*) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1.$$

Решение. Приведём неравенство к виду (14), перенеся единицу влево:

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+2x+8}{x+5} > 0.$$

Как и в (14), обозначим

$$f(x) = \sqrt{x^2+x-6}+2x+8, \quad g(x) = x+5.$$

Функция f определена при $x^2+x-6 \geqslant 0$, то есть при $x \leqslant -3$ и при $x \geqslant 2$. Функция g определена на всей числовой прямой. Таким образом, мы решаем неравенство на множестве

$$M = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty).$$

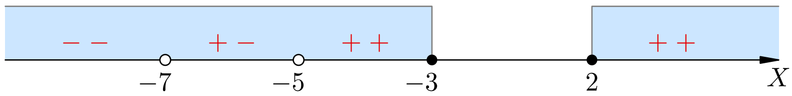
Находим нули функции f:

$$\sqrt{x^2+x-6}+2x+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+x-6} = -2x-8 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+x-6=(2x+8)^2, \\ 2x+8 \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2+31x+70=0, \\ x \leqslant -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=-7.$$

Итак, функция f обращается в нуль при $x = -7$ и меняет знак при переходе только через эту точку. Функция g обращается в нуль при $x = -5$ и меняет знак при переходе только через эту точку.

Расставим на числовой оси знаки функций $f(x)$ и $g(x)$ (первым идёт знак f). Фоном выделено множество M.



Дробь $f(x)/g(x)$ должна быть положительной, так что выбор подходящих промежутков очевиден.

Ответ: $(-\infty; -7) \cup (-5; -3] \cup [2; +\infty)$.

Замена переменной

В некоторых задачах бывает полезно сделать замену переменной, обозначив новой буквой имеющийся *корень* из некоторого выражения.

Задача 14. (*МГУ, геологич. ф-т, 1997*) Решить неравенство:

$$\frac{x}{20 - \sqrt{x}} < 10.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x} = t$; тогда $x = t^2$. Наше неравенство принимает вид:

$$\frac{t^2}{20 - t} < 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2 + 10t - 200}{t - 20} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t - 10)(t + 20)}{t - 20} > 0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов и делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} -20 < t < 10, \\ t > 20 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -20 < \sqrt{x} < 10, \\ \sqrt{x} > 20 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 100, \\ x > 400. \end{array}\right.$$

Ответ: $[0; 100) \cup (400; +\infty)$.

Задача 15. (*МГУ, социологич. ф-т, 1999*) Решить уравнение: $\sqrt{y - 2} = 7 - y$.

Решение. Мы уже умеем решать такие уравнения с помощью равносильного перехода (4). Но здесь возможен и другой способ. Обозначим $t = \sqrt{y - 2}$; тогда $t^2 = y - 2$ и $y = 2 + t^2$, причём $t \geqslant 0$. Наше уравнение переписывается в виде:

$$t = 7 - (2 + t^2) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}, \quad t_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Условию $t \geqslant 0$ удовлетворяет лишь число t_1. Поэтому обратная замена:

$$y = 2 + t_1^2 = 2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{15 - \sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: $\frac{15 - \sqrt{21}}{2}$.

Отметим, что характерной особенностью данного способа является отсечение лишних корней ещё на «этапе переменной t»: корень t_2 оказался лишним, будучи отрицательным.

Задача 16. (*МГУ, ВМК, 1989*) Решить уравнение:

$$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x=33+4x^2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$4x-4x^2+16\sqrt{3+4x-4x^2}=33 \quad \Leftrightarrow \quad \left(3+4x-4x^2\right)+16\sqrt{3+4x-4x^2}-36=0.$$

Замена $t=\sqrt{3+4x-4x^2}$ приводит к квадратному уравнению:

$$t^2+16t-36=0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1=-18, \quad t_2=2.$$

Поскольку $t \geqslant 0$, число t_1 отпадает. Обратная замена:

$$\sqrt{3+4x-4x^2}=t_2=2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-4x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Использование монотонности

Монотонно возрастающая (убывающая) функция принимает каждое своё значение ровно один раз. Этот факт можно использовать следующим образом: *подбираем* корень соответствующего уравнения, а потом из соображений монотонности *доказываем*, что других корней нет.

Задача 17. (*МГУ, ВМК, 1991*) Решить уравнение: $\sqrt{x+4}+x-2=0$.

Решение. Разумеется, не представляет труда решить это уравнение с помощью равносильного перехода или замены переменной. Но возможен и ещё один способ — самый простой в этой ситуации.

Пусть

$$f(x)=\sqrt{x+4}+x-2.$$

Заметим, что $f(0)=0$, так что $x=0$ — корень нашего уравнения.

Будучи суммой двух монотонно возрастающих функций $\sqrt{x+4}$ и $x-2$, функция $f(x)$ также является монотонно возрастающей. Следовательно, ни при каких значениях x, кроме нуля, функция $f(x)$ в нуль не обращается. Поэтому других корней, кроме нуля, наше уравнение не имеет.

Ответ: 0.