

Иррациональные неравенства

Содержание

1	Учёт ОДЗ	1
2	Равносильные преобразования	2
3	Двукратное возведение в квадрат	8
4	Дробно-иррациональные неравенства	9
5	Замена переменной	11
6	Умножение на сопряжённое	12
7	Задачи	14

Как и в случае уравнений, мы называем неравенство *иррациональным*, если оно содержит переменную под знаком корня. Данная статья посвящена методам решения иррациональных неравенств.

1 Учёт ОДЗ

Напомним, что *область допустимых значений* (ОДЗ) неравенства есть множество значений переменной, при которых обе части данного неравенства имеют смысл.

ЗАДАЧА 1. Решить неравенство

$$\sqrt{2 - x - x^2} > -1.$$

РЕШЕНИЕ. Квадратный корень может принимать только неотрицательные значения, поэтому данное неравенство выполнено всегда, когда квадратный корень определён. Иными словами, множеством решений данного неравенства служит его ОДЗ:

$$2 - x - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 1.$$

ОТВЕТ: $[-2; 1]$.

Поиск ОДЗ неравенства далеко не всегда является целесообразным занятием; однако в отдельных ситуациях предварительное нахождение ОДЗ даёт ключ к решению задачи.

ЗАДАЧА 2. Решить неравенство

$$\sqrt{15 - 2x - x^2} + \sqrt{x - 3} > 2x - 7.$$

РЕШЕНИЕ. По виду неравенства ясно, что никакие стандартные методы тут работать не будут. Давайте найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 15 - 2x - x^2 \geq 0, \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 3, \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Вот ситуация и прояснилась: ОДЗ состоит из одного-единственного числа. Поэтому достаточно подставить $x = 3$ в неравенство и проверить, выполняется ли оно. Подставляем и убеждаемся, что $x = 3$ — решение.

ОТВЕТ: 3.

2 Равносильные преобразования

Приступаем к рассмотрению стандартных видов иррациональных неравенств. В каждом из случаев нет нужды предварительно искать ОДЗ; самое эффективное решение обеспечивается соответствующими равносильными преобразованиями.

Неравенства вида $\sqrt{A} < \sqrt{B}$

Рассмотрим неравенство

$$\sqrt{A} < \sqrt{B},$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную. В силу монотонного возрастания функции \sqrt{x} должно быть выполнено неравенство $A < B$; но надо не забыть «подпереть нулём» это неравенство снизу: $0 \leq A < B$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow 0 \leq A < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B, \\ A \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Обратите внимание, что нет необходимости ради поиска ОДЗ решать неравенство $B \geq 0$. Выражение B автоматически получается неотрицательным — ведь в силу системы (1) величина B больше неотрицательной величины A .

Ясно, что эквивалентность (1) сохраняется при замене знака $<$ на \leq .

ЗАДАЧА 3. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+4} < \sqrt{x^2+8x-3}.$$

РЕШЕНИЕ. В силу (1) неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+4 < x^2+8x-3, \\ 2x+4 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-7 > 0, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы имеет решения $x < -7$ или $x > 1$. Отсюда легко получаем ответ.

ОТВЕТ: $(1; +\infty)$.

Теперь, кстати, представьте себе, что вы решили предварительно поискать ОДЗ, занявшись решением неравенства $x^2+8x-3 \geq 0$. Представили? ;-)

ЗАДАЧА 4. (МГУ, геологич. ф-т, 2006) Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - x^3} \geq \sqrt{3x - \frac{5}{2}x^2}.$$

РЕШЕНИЕ. Неравенство равносильно системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - x^3 \geq 3x - \frac{5}{2}x^2, \\ 3x - \frac{5}{2}x^2 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 3x \leq 0, \\ 5x^2 - 6x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)(x-3) \leq 0, \\ x(5x-6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 1 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq x \leq \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 1 \leq x \leq \frac{6}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\{0\} \cup [1; \frac{6}{5}]$.

Неравенства вида $A\sqrt{B} \geq 0$

Перейдём к рассмотрению неравенства¹

$$A\sqrt{B} \geq 0.$$

Ввиду неотрицательности корня возможны два случая: 1) $B = 0$, и при этом A определено; 2) $A \geq 0$, и при этом $B > 0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$A\sqrt{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} B = 0, \\ A \text{ определено,} \end{cases} \\ \begin{cases} A \geq 0, \\ B > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

ЗАДАЧА 5. (МГУ, ВМК, 1978) Решить неравенство

$$(x - 1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

РЕШЕНИЕ. В силу (2) неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x^2 - x - 2 > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Уравнение совокупности имеет корни -1 и 2 . Множество решений квадратного неравенства: $x < -1$ или $x > 2$, поэтому множество решений системы есть $x > 2$. Объединяя множество $\{-1, 2\}$ корней уравнения с множеством решений системы, получаем ответ.

ОТВЕТ: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Переходим к неравенствам, для решения которых требуется возведение обеих частей в квадрат. Сделаем предварительно два замечания.

1. При возведении в квадрат иррациональных *уравнений* можно в принципе обойтись без равносильных переходов, так как лишние корни можно отсеять непосредственной поочерёдной проверкой конечного набора корней уравнения-следствия (это бывает сложно технически, но теоретически всегда возможно). Однако в результате возведения в квадрат *неравенства* может появиться бесконечное множество лишних решений, и все их проверить уже не представляется возможным. Поэтому использование равносильных переходов при решении иррациональных неравенств становится жизненной необходимостью.
2. Неравенство можно возводить в квадрат лишь в том случае, когда обе его части неотрицательны:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad \text{при } a, b \geq 0.$$

В противном случае верное неравенство может превратиться в неверное:

$$-3 < 2 \rightarrow 9 < 4,$$

или, наоборот, неверное неравенство может превратиться в верное:

$$2 < -3 \rightarrow 4 < 9.$$

¹Мы берём именно случай нестрогого неравенства, так как он чаще встречается в экзаменационной практике; разобравшись в нём, вы без труда напишете правильную эквивалентность для строгого неравенства.

Неравенства вида $\sqrt{A} < B$

Рассмотрим в качестве примера неравенство

$$\sqrt{3-x} < x-1.$$

Если $x-1 \leq 0$, то неравенство решений не имеет, поскольку арифметический квадратный корень не может быть меньше неположительного числа.

Если $x-1 > 0$, то обе части неравенства неотрицательны, и мы имеем право возвести неравенство в квадрат:

$$3-x < (x-1)^2,$$

не забыв при этом, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3-x \geq 0.$$

Таким образом, имеем равносильный переход:

$$\sqrt{3-x} < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ 3-x < (x-1)^2, \\ 3-x \geq 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим: $x \in (2; 3]$.

После этого примера хорошо понятно, что в общем случае имеет место следующая эквивалентность:

$$\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0, \\ A < B^2, \\ A \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если же неравенство нестрогое, то величина B может быть нулём:

$$\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0, \\ A \leq B^2, \\ A \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

ЗАДАЧА 6. (МГУ, физический ф-т, 2005) Решить неравенство

$$\sqrt{3x-x^2+10} < \sqrt{10}-x.$$

РЕШЕНИЕ. Согласно (3) неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{10}-x > 0, \\ 3x-x^2+10 < (\sqrt{10}-x)^2, \\ 3x-x^2+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt{10}, \\ 2x^2 - (3+2\sqrt{10})x > 0, \\ (x+2)(x-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt{10}, \\ \begin{cases} x < 0, \\ x > \frac{3}{2} + \sqrt{10}, \end{cases} \\ -2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Из полученной системы легко находим $-2 \leq x < 0$.

ОТВЕТ: $[-2; 0)$.

ЗАДАЧА 7. (МГУ, мехмат, 2003) Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{5x^7-32x^3}{5x-x^3-4}} \leq x^3.$$

РЕШЕНИЕ. Сразу же отметим, что имеет место разложение на множители

$$x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4) = (x - 1) \left(x + \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right).$$

Согласно (4) неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^3 \geq 0, \\ \frac{5x^7 - 32x^3}{5x - x^3 - 4} \leq x^6, \\ \frac{5x^7 - 32x^3}{5x - x^3 - 4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^3(x^6 + 4x^3 - 32)}{5x - x^3 - 4} \leq 0, \\ \frac{x^3(5x^4 - 32)}{x^3 - 5x + 4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^3(x^3 - 4)(x^3 + 8)}{(x - 1) \left(x + \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)} \geq 0, \\ \frac{5x^3 \left(x^4 - \frac{32}{5} \right)}{(x - 1) \left(x + \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^3 \left(x - \sqrt[3]{4} \right)}{(x - 1) \left(x - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)} \geq 0, \\ \frac{x^3 \left(x - \sqrt[4]{\frac{32}{5}} \right)}{(x - 1) \left(x - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)} \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

(мы разложили на множители разности квадратов и кубов, после чего, воспользовавшись условием $x \geq 0$, удалили все заведомо положительные сомножители).

Чтобы решить второе неравенство системы (5), нам нужно сравнить числа $\sqrt[3]{4}$ и $\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$ (понятно, что оба они больше 1). Для этого сравним с нулём разность их кубов:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{4} \right)^3 - \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)^3 &= 4 - \frac{17\sqrt{17} - 3 \cdot 17 + 3\sqrt{17} - 1}{8} = \\ &= 4 - \frac{20\sqrt{17} - 52}{8} = 4 - \frac{5\sqrt{17} - 13}{2} = \frac{21 - 5\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{441} - \sqrt{425}}{2} > 0, \end{aligned}$$

поэтому $\sqrt[3]{4} > \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$. Теперь, решая второе неравенство (5) методом интервалов, получим

$$\boxed{x = 0, \quad 1 < x < \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \quad x \geq \sqrt[3]{4}} \quad (6)$$

(отрицательные значения x отброшены в силу первого неравенства (5)).

Для решения третьего неравенства системы (5) нужно сравнить числа $\sqrt[4]{\frac{32}{5}}$ и $\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$. Сравниваем с нулём разность их четвёртых степеней:

$$\begin{aligned} \frac{32}{5} - \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)^4 &= \frac{32}{5} - \left(\frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} \right)^2 = \frac{32}{5} - \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{32}{5} - \frac{98 - 18\sqrt{17}}{4} = \frac{32}{5} - \frac{49 - 9\sqrt{17}}{2} = \frac{45\sqrt{17} - 181}{2} = \frac{\sqrt{34425} - \sqrt{32761}}{10} > 0, \end{aligned}$$

поэтому $\sqrt[4]{\frac{32}{5}} > \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$. Теперь решаем третье неравенство (5):

$$\boxed{0 \leq x < 1, \quad \frac{\sqrt{17} - 1}{2} < x \leq \sqrt[4]{\frac{32}{5}}.} \quad (7)$$

Решением исходного неравенства служит пересечение «рамочек» — множеств (6) и (7). Остаётся только сравнить числа $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{\frac{32}{5}}$. Для этого сравниваем с нулём разность их 12-х степеней:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^{12} - \left(\sqrt[4]{\frac{32}{5}}\right)^{12} = 4^4 - \left(\frac{32}{5}\right)^3 = 256 - \frac{32768}{125} = \frac{32000 - 32768}{125} < 0.$$

Следовательно, $\sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{\frac{32}{5}}$, и окончательно имеем:

$$x = 0, \quad \sqrt[3]{4} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{32}{5}}.$$

ОТВЕТ: $\{0\} \cup \left[\sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{\frac{32}{5}}\right]$.

Неравенства вида $\sqrt{A} > B$

Теперь в качестве примера рассмотрим неравенство

$$\sqrt{3-x} > x-1.$$

Пусть сначала $x-1 < 0$. Поскольку в левой части стоит неотрицательное выражение $\sqrt{3-x}$, множеством решений неравенства в этом случае является ОДЗ: $3-x \geq 0$.

Пусть теперь $x-1 \geq 0$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, имеем право возвести неравенство в квадрат: $3-x > (x-1)^2$.

Таким образом, имеем эквивалентность:

$$\sqrt{3-x} > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 0, \\ 3-x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \leq 3, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 3-x > (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - x - 2 < 0. \end{cases}$$

Решением первой системы служит множество $x < 1$. Решением второй системы служит множество $1 \leq x < 2$. Объединяя эти множества, получаем ответ: $x < 2$.

Ясно теперь, что в общем случае имеет место эквивалентность:

$$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0, \\ A \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0, \\ A > B^2. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогично в случае нестрого неравенства имеем:

$$\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \leq 0, \\ A \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0, \\ A \geq B^2. \end{cases} \quad (9)$$

ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 1998) Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > \frac{1 - 2x}{3}. \quad (10)$$

РЕШЕНИЕ. В соответствии с совокупностью (8) рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\frac{1-2x}{3} < 0$, то есть

$$x > \frac{1}{2}. \quad (11)$$

При ограничении (11) исходное неравенство (10) равносильно неравенству $3x^2 - 8x - 3 \geq 0$, решения которого —

$$x \leq -\frac{1}{3}, \quad x \geq 3. \quad (12)$$

Пересекая множества (11) и (12), получаем первую часть множества решений неравенства (10):

$$\boxed{x \geq 3.} \quad (13)$$

Пусть теперь $\frac{1-2x}{3} \geq 0$, то есть

$$x \leq \frac{1}{2}. \quad (14)$$

При ограничении (14) неравенство (10) равносильно неравенству

$$3x^2 - 8x - 3 > \left(\frac{1 - 2x}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 23x^2 - 68x - 28 > 0,$$

решения которого —

$$x < x_1 = \frac{34 - 30\sqrt{2}}{23}, \quad x > x_2 = \frac{34 + 30\sqrt{2}}{23}. \quad (15)$$

Ясно, что $x_1 < 0 < \frac{1}{2}$, $x_2 > 1 > \frac{1}{2}$; пересекая множества (14) и (15), получим вторую часть множества решений неравенства (10):

$$\boxed{x < \frac{34 - 30\sqrt{2}}{23}.} \quad (16)$$

Остаётся объединить «рамочки» — множества (13) и (16).

ОТВЕТ: $\left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3; +\infty)$.

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 2006) Решить неравенство

$$\sqrt{\sqrt{16x + 36} + 6} \geq x. \quad (17)$$

РЕШЕНИЕ. При ограничении

$$x \leq 0 \quad (18)$$

неравенство (17) равносильно неравенству

$$\sqrt{16x + 36} + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{4}. \quad (19)$$

Пересечение (18) и (19) даёт часть решений неравенства (17):

$$\boxed{-\frac{9}{4} \leq x \leq 0.} \quad (20)$$

Теперь рассмотрим случай

$$x > 0. \quad (21)$$

При ограничении (21) неравенство (17) равносильно неравенству

$$\sqrt{16x + 36} + 6 \geq x^2 \Leftrightarrow \sqrt{16x + 36} \geq x^2 - 6. \quad (22)$$

Очевидно, что значения

$$\boxed{0 < x \leq \sqrt{6}} \quad (23)$$

удовлетворяют неравенству (22). Остаётся рассмотреть ограничение

$$x > \sqrt{6}, \quad (24)$$

при котором неравенство (22) равносильно неравенству

$$16x + 36 \geq (x^2 - 6)^2 \Leftrightarrow x(x^3 - 12x - 16) \leq 0 \Leftrightarrow x(x + 2)^2(x - 4) \leq 0.$$

Решения полученного неравенства, удовлетворяющие условию (24), суть значения

$$\boxed{\sqrt{6} < x \leq 4}. \quad (25)$$

Множество решений исходного неравенства (17) является объединением всех «рамочек», то есть множеств (20), (23) и (25).

ОТВЕТ: $[-\frac{9}{4}; 4]$.

3 Двукратное возведение в квадрат

Если неравенство содержит сумму или разность двух радикалов, то, возможно, придётся возводить в квадрат два раза.

ЗАДАЧА 10. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Решить неравенство

$$\sqrt{10x - x^2 - 24} \geq \sqrt{x^2 - 13x + 42} - \sqrt{x^2 - 11x + 30}.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь полезно начать с нахождения ОДЗ:

$$\begin{cases} 10x - x^2 - 24 \geq 0, \\ x^2 - 13x + 42 \geq 0, \\ x^2 - 11x + 30 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq 6, \\ \begin{cases} x \leq 6, \\ x \geq 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5, \quad x = 6.$$

Перепишем исходное неравенство, разложив каждый из квадратных трёхчленов на множители:

$$\sqrt{(6-x)(x-4)} \geq \sqrt{(6-x)(7-x)} - \sqrt{(6-x)(5-x)} \quad (26)$$

(каждый из сомножителей неотрицателен в ОДЗ). Легко видеть, что $x = 6$ является решением неравенства (26); остаётся рассмотреть данное неравенство на множестве $E = [4; 5]$.

Делим обе части неравенства (26) на выражение $\sqrt{6-x}$, которое положительно на множестве E , и приходим к равносильному на E неравенству

$$\sqrt{x-4} \geq \sqrt{7-x} - \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \sqrt{x-4} + \sqrt{5-x} \geq \sqrt{7-x}.$$

Обе части последнего неравенства положительны на множестве E ; возводя в квадрат, получим равносильное на E неравенство

$$1 + 2\sqrt{(x-4)(5-x)} \geq 7-x \Leftrightarrow 2\sqrt{9x-x^2-20} \geq 6-x.$$

Поскольку $6-x > 0$ на множестве E , снова возводим в квадрат:

$$4(9x-x^2-20) \geq (6-x)^2 \Leftrightarrow 5x^2-48x+116 \leq 0.$$

Полученное неравенство равносильно на множестве E неравенству (26). Но ввиду отрицательности дискриминанта это квадратное неравенство не имеет решений. Следовательно, не имеет решений на множестве E и неравенство (26). Таким образом, $x = 6$ — единственное решение нашего неравенства.

ОТВЕТ: 6.

4 Дробно-иррациональные неравенства

Как вы знаете, метод интервалов применяется для решения рациональных (или, как ещё говорят, дробно-рациональных) неравенств; в таких неравенствах фигурируют только дроби, у которых числитель и знаменатель — многочлены. Если же в числителе или знаменателе появляется переменная под знаком корня, то мы будем говорить о *дробно-иррациональных* неравенствах. Мы позволим себе не вдаваться в более подробное обсуждение этой терминологии; на рассматриваемых ниже примерах станет ясно, о неравенствах какого типа идёт речь и какой они обладают спецификой.

ЗАДАЧА 11. (МГУ, ф-т гос. управления, 2005) Решить неравенство

$$1 < \frac{\sqrt{5}(x-5)}{\sqrt{x^2-10x+26}}.$$

РЕШЕНИЕ. Сразу сделаем замену $t = x - 5$:

$$1 < \frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{t^2+1}}. \quad (27)$$

Теперь замечаем, что выражение $\sqrt{t^2+1}$ положительно при всех t , и поэтому можно умножить на него обе части неравенства (27); получим равносильное неравенство

$$\sqrt{t^2+1} < t\sqrt{5},$$

которое решается уже известным вам способом. Легко находим $t > \frac{1}{2}$, откуда $x > \frac{11}{2}$.

ОТВЕТ: $(\frac{11}{2}; +\infty)$.

ЗАДАЧА 12. (МГУ, биологич. ф-т, 2003) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{16-x^2}}{3-x} \leq 1. \quad (28)$$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ неравенства есть множество $[-4; 3) \cup (3; 4]$. Пусть сначала $x \in E_1 = [-4; 3)$. Тогда $3-x > 0$; умножая неравенство на $3-x$, получим равносильное на множестве E_1 неравенство

$$\sqrt{16-x^2} \leq 3-x \Leftrightarrow 16-x^2 \leq (3-x)^2 \Leftrightarrow 2x^2-6x-7 \geq 0.$$

Решения полученного квадратного неравенства суть $x \leq \frac{3-\sqrt{23}}{2}$ и $x \geq \frac{3+\sqrt{23}}{2}$; пересекая это с множеством E_1 (и учитывая, что $\frac{3+\sqrt{23}}{2} > \frac{3+\sqrt{16}}{2} > 3$), получаем часть решений исходного неравенства:

$$-4 \leq x \leq \frac{3-\sqrt{23}}{2}. \quad (29)$$

Пусть теперь $x \in E_2 = (3; 4]$. Тогда $3 - x < 0$ и неравенство (28) выполнено, поскольку его левая часть неположительна. Значит, любой $x \in E_2$ служит решением нашего неравенства. Объединяя множества (29) и E_2 , получаем ответ.

ОТВЕТ: $\left[-4; \frac{3-\sqrt{23}}{2}\right] \cup (3; 4]$.

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1997) Решить неравенство

$$\frac{26 - 3x + \sqrt{x^2 - 2x - 24}}{x - 10} < -1.$$

РЕШЕНИЕ. Переносим -1 влево и приводя к общему знаменателю, получим равносильное неравенство

$$\frac{16 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x - 24}}{x - 10} < 0. \quad (30)$$

ОДЗ этого неравенства есть множество $(-\infty; -4] \cup [6; 10) \cup (10; +\infty)$.

Пусть сначала $x \in E_1 = (-\infty; -4] \cup [6; 10)$. Тогда $x - 10 < 0$, в силу чего неравенство (30) равносильно на множестве E_1 неравенству

$$16 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x - 24} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2x - 24} > 2x - 16. \quad (31)$$

Любой $x < 8$, входящий в E_1 , является решением неравенства (31). Если же $x \in [8; 10)$, то неравенство (31) равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 24 > (2x - 16)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 62x + 280 < 0,$$

решения которого образуют множество $\left(\frac{20}{3}; 14\right)$, содержащее в себе рассматриваемое множество $[8; 10)$. Следовательно, любой $x \in [8; 10)$ также является решением неравенства (31), и, значит, множество E_1 — часть множества решений нашего неравенства.

Пусть теперь $x \in E_2 = (10; +\infty)$. Тогда $x - 10 > 0$, и неравенство (31) равносильно на множестве E_2 неравенству

$$16 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x - 24} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2x - 24} < 2x - 16.$$

Ввиду того, что $2x - 16 > 0$ на множестве E_2 , полученное неравенство в свою очередь равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 16 < (2x - 16)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 62x + 280 > 0,$$

решения которого, принадлежащие E_2 , суть $x > 14$.

ОТВЕТ: $(-\infty; -4] \cup [6; 10) \cup (14; +\infty)$.

ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2012) Решить неравенство

$$\frac{3x + 3}{3 - \sqrt{x^2 - 2x + 10}} \leq 1.$$

РЕШЕНИЕ. Знаменатель, равный $3 - \sqrt{9 + (x - 1)^2}$, обращается в нуль при $x = 1$ и отрицателен при всех $x \neq 1$. Следовательно, на множестве $x \neq 1$ наше неравенство равносильно неравенству

$$3x + 3 \geq 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 10} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 10} \geq -3x.$$

Полученное неравенство не представляет трудностей, и вы легко доведёте дело до конца самостоятельно.

ОТВЕТ: $[-\frac{5}{4}; 1) \cup (1; +\infty)$.

5 Замена переменной

В некоторых задачах бывает полезно сделать замену переменной, обозначив новой буквой имеющийся *корень* из некоторого выражения.

ЗАДАЧА 15. (МГУ, геологич. ф-т, 1997) Решить неравенство

$$\frac{x}{20 - \sqrt{x}} < 10.$$

РЕШЕНИЕ. Обозначим $\sqrt{x} = t$; тогда $x = t^2$. Наше неравенство принимает вид:

$$\frac{t^2}{20 - t} < 10 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 10t - 200}{t - 20} > 0 \Leftrightarrow \frac{(t - 10)(t + 20)}{t - 20} > 0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов и делаем обратную замену:

$$\begin{cases} -20 < t < 10, \\ t > 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20 < \sqrt{x} < 10, \\ \sqrt{x} > 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 100, \\ x > 400. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $[0; 100) \cup (400; +\infty)$.

ЗАДАЧА 16. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) Решите неравенство

$$\sqrt{x + 2} > x - 3.$$

РЕШЕНИЕ. Вы уже знаете, как решать подобные неравенства, но в данном случае можно поступить и по-другому. Обозначим $t = \sqrt{x + 2}$; тогда $x = t^2 - 2$, и наше неравенство принимает вид

$$t > (t^2 - 2) - 3 \Leftrightarrow t^2 - t - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < t < \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

После обратной замены с учётом условия $\frac{1 - \sqrt{21}}{2} < 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < \sqrt{x + 2} < \frac{1 + \sqrt{21}}{2} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 \leq x + 2 < \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{11 + \sqrt{21}}{2} &\Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{7 + \sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $[-2; \frac{7 + \sqrt{21}}{2})$.

ЗАДАЧА 17. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите сумму целых чисел, являющихся решениями неравенства

$$\sqrt{5x - 11} - \sqrt{5x^2 - 21x + 21} \geq 5x^2 - 26x + 32.$$

РЕШЕНИЕ. Обозначим $u = \sqrt{5x - 11}$, $v = \sqrt{5x^2 - 21x + 21}$. Наше неравенство запишется в виде

$$u - v \geq v^2 - u^2 \Leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) \geq 0.$$

Учитывая, что величина $u + v + 1$ положительна при всех допустимых значениях x , имеем

$$\begin{aligned} u \geq v &\Leftrightarrow \sqrt{5x - 11} \geq \sqrt{5x^2 - 21x + 21} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 11 \geq 5x^2 - 21x + 21, \\ 5x^2 - 21x + 21 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 26x + 32 \leq 0, \\ 5x^2 - 21x + 21 \geq 0. \end{cases} \quad (32) \end{aligned}$$

Система (32) равносильна исходному неравенству. Решения первого неравенства системы образуют множество $[2; \frac{16}{5}]$, которое содержит лишь два целых числа 2 и 3. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = 2$ не удовлетворяет второму неравенству (32), а $x = 3$ удовлетворяет ему. Значит, исходное неравенство имеет единственное целое решение $x = 3$. Это и есть ответ.

ОТВЕТ: 3.

6 Умножение на сопряжённое

В некоторых ситуациях полезно бывает умножить и разделить на выражение, сопряжённое данному.

ЗАДАЧА 18. («Физтех», 2016, 9) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x+1}} \geq 1 + \sqrt{x+1}.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 1} + \sqrt{x+1} + 1 \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)} + \sqrt{x+1} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x+1} + 1)}{x} + \sqrt{x+1} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 1) \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x} + 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 1) \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x} \leq 0. \end{aligned}$$

ОДЗ нашего неравенства есть множество $x > 0$. На этом множестве полученное неравенство равносильно неравенству

$$x + \sqrt{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

В пересечении с ОДЗ имеем $0 < x \leq 1$.

ОТВЕТ: $(0; 1]$.

ЗАДАЧА 19. (МГУ, ВМК, 2006) Решить неравенство

$$10\sqrt{3x - \sqrt{72x - 144}} > 3x - 12.$$

РЕШЕНИЕ. Сразу делаем замену $t = 3x$:

$$10\sqrt{t - \sqrt{24t - 144}} > t - 12. \quad (33)$$

Найдём ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{aligned} t - \sqrt{24t - 144} \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{24t - 144} \leq t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ 0 \leq 24t - 144 \leq t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t \geq 6, \\ (t - 12)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 6. \end{aligned}$$

Умножим и разделим подкоренное выражение в (33) на сопряжённое $t + \sqrt{24t - 144}$ (которое положительно при всех $t \geq 6$):

$$t - \sqrt{24t - 144} = \frac{(t - \sqrt{24t - 144})(t + \sqrt{24t - 144})}{t + \sqrt{24t - 144}} = \frac{t^2 - (24t - 144)}{t + \sqrt{24t - 144}} = \frac{(t - 12)^2}{t + \sqrt{24t - 144}}.$$

В результате придём к равносильному неравенству

$$\frac{10|t - 12|}{\sqrt{t + \sqrt{24t - 144}}} > t - 12. \quad (34)$$

Все значения $t \in [6; 12)$ являются решениями неравенства (34), поскольку его правая часть отрицательна при данных t , а левая — положительна. Значение $t = 12$, как легко видеть, не является решением (34).

Пусть теперь $t > 12$. В этом случае неравенство (34) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \frac{10(t - 12)}{\sqrt{t + \sqrt{24t - 144}}} > t - 12 &\Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{t + \sqrt{24t - 144}}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{t + \sqrt{24t - 144}} < 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t + \sqrt{24t - 144} < 100 \Leftrightarrow \sqrt{24t - 144} < 100 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - t > 0, \\ 24t - 144 < (100 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t < 100, \\ t^2 - 224t + 10144 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 100, \\ \begin{cases} t < 112 - 20\sqrt{6}, \\ t > 112 + 20\sqrt{6} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow t < 112 - 20\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Итак, имеем множество решений неравенства (33):

$$6 \leq t < 12, \quad 12 < t < 112 - 20\sqrt{6}.$$

Остаётся сделать обратную замену $x = t/3$ и получить множество решений исходного неравенства:

$$2 \leq x < 4, \quad 4 < x < \frac{112 - 20\sqrt{6}}{3}.$$

ОТВЕТ: $[2; 4) \cup \left(4; \frac{112 - 20\sqrt{6}}{3}\right)$.

7 Задачи

Во всех задачах требуется решить неравенство.

Учёт ОДЗ

1. а) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq -2$; б) $\sqrt{2 + x - x^2} + \sqrt{x - 2} > 3x - 7$.

$$\mathbb{Z} \cap (\infty+; 1] \cap [8-; \infty-)$$

2. (МГУ, геологич. ф-т, 1994) $\sqrt{4x - 3 - x^2} \neq 0$.

$$(8; 1)$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9)

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x + 3 - x^2} \geq 2.$$

$$8; 1; 1-$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11)

$$\sqrt{2x^{1006} - (x^{2012} + 1)} > 3x^{1799} + 1.$$

$$1-$$

5. (МГУ, ВМК, 2006)

$$\sqrt{\frac{x^2 - 22x + 121}{x^2 - 24x + 140}} \geq 50x - 2x^2 - 309.$$

$$(\infty+; 71) \cap \{11\} \cap (01; \infty-)$$

Равносильные преобразования

6. а) $\sqrt{2 - x} < \sqrt{3x^2 - 2x - 2}$; б) $\sqrt{3x - \frac{23}{4}} \geq \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

$$\left[\frac{7}{01}; \frac{7}{1} \right] \cap \left[\frac{8}{7} \right] \cap (1-; \infty-)$$

7. (МГУ, геологич. ф-т, 2006) $\sqrt{\frac{5}{2}x^2 - x^3} \geq \sqrt{6x - \frac{5}{2}x^2}$.

$$\left[\frac{5}{12} \right] \cap \{0\}$$

8. («Ломоносов», 2011, 11) $\sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{5x^2 - 1 - 4x - x^3}$.

$$\{2\} \cap [1-; \infty-)$$

9. (МГУ, ИСАА, 2004) $\sqrt{x^2 - 25} \cdot (x - 3) < 0$.

$$(8-; \infty-)$$

10. (МГУ, биологич. ф-т, 2006) $\sqrt{x + 1} \cdot (x^2 + 3x - 4) \geq 0$.

$$(\infty+; 1) \cap \{1-\}$$

11. (МГУ, геологич. ф-т, 1988) $(x^2 + 8x + 15) \sqrt{x + 4} \geq 0.$

$$\{\infty+; 3-] \cap \{4-\}$$

12. (МГУ, экономич. ф-т, 1986) $\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} (8x^2 - 6x + 1) \geq 0.$

$$\{\frac{5}{2}\} \cap [\frac{1}{11}; \frac{5}{11}]$$

13. (МГУ, физический ф-т, 1996)

$$\frac{x - 2}{x\sqrt{10 + 3x - x^2}} > 0.$$

$$\{5; 2\} \cap (0; 7-)$$

14. (МГУ, биологич. ф-т, 2001)

$$\frac{\sqrt{x^2 + 5x - 84}}{x - 7} \geq 0.$$

$$(\infty+; 2) \cap \{71-\}$$

15. (МГУ, ВШБ, 2003)

$$\frac{\sqrt{(x + 5)(x - 3)}}{x + 5} \leq 0.$$

$$\{3\} \cap (5-; \infty-)$$

16. (МГУ, географич. ф-т, 2004)

$$\frac{\sqrt{x^6 - 64}}{x - 3} \geq 0.$$

$$(\infty+; 3) \cap \{-2, 2\} \cup \{\infty\}$$

17. (МГУ, ИСАА, 2001)

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{6 + 3\sqrt{3}x - 2x^2} \leq 0.$$

$$(\infty+; \frac{3}{2} \wedge \frac{1}{2}) \cap \{3; \frac{2}{11}-\} \cap (\frac{2}{3} \sqrt{3}-; \infty-)$$

18. (МГУ, мехмат, 1983)

$$\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x + 5} \geq \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x + 4}.$$

$$\{3\} \cap [1-; 7-]$$

19. (МГУ, биологич. ф-т, 2005) $\sqrt{x - 1} < 3 - x.$

$$\{7; 1\}$$

20. (МГУ, ф-т психологии, 2002) $\sqrt{x + 1} > x - 2.$

$$(\frac{2}{31} \sqrt{3} + 5; 1-]$$

21. (МГУ, геологич. ф-т, 1992) $\sqrt{10x-1} + 1 \leq 5x$.

$$\left(\infty+; \frac{9}{2\sqrt{17}+2} \right]$$

22. (МГУ, физический ф-т, 1979) $\sqrt{x^2+x-2} < x$.

$$[2; 1]$$

23. (МГУ, МШЭ, 2005) $\sqrt{x^2+2x} - x > 1$.

$$[2-; \infty-)$$

24. (МГУ, геологич. ф-т, 1984) $\sqrt{2x^2-18x+16} < x-4$.

$$(01; 8]$$

25. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) $\sqrt{x^2+x-6} > -x-1$.

$$(\infty+; 2] \cap (2-; \infty-)$$

26. (МГУ, экономич. ф-т, 2003) $\sqrt{5-4x-x^2} \geq -2x-1$.

$$[1; 2-]$$

27. (МГУ, геологич. ф-т, 1994) $\sqrt{24-10x+x^2} > x-4$.

$$(-\infty; 4)$$

28. (МГУ, биологич. ф-т, 1980) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

$$[5; 5]$$

29. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) $\sqrt{-x^2-x+6} - x \geq 2$.

$$\left[-3; \frac{4}{\sqrt{11}-5} \right]$$

30. (МГУ, физический ф-т, 2005) $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x$.

$$(-1; 0)$$

31. (МФТИ, 1998) $\sqrt{2x^2-7x-4} > -x - \frac{1}{4}$.

$$(\infty+; 4] \cap \left(\frac{4}{\sqrt{290}-15}; \infty- \right)$$

32. (МГУ, экономич. ф-т, 1983) $4(x-1) < \sqrt{3x^2+19x+20}$.

$$(-\infty; -5] \cup \left[-\frac{3}{4}; 4 \right)$$

33. (МГУ, МШЭ, 2007) $\sqrt{x^2-3x+2} \leq x-1$.

$$(\infty+; 2] \cap \{1\}$$

34. (МГУ, геологич. ф-т, 2004) $\sqrt{441-x^2} \leq x+21$.

$$[12; 0] \cup \{12-21\}$$

35. («Физтех», 2015, 10) $\sqrt{x^2 - 16} \cdot \sqrt{2x - 1} \leq x^2 - 16.$

$(-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$

36. (МГУ, физический ф-т, 2006)

$$\sqrt{(3-x)\sqrt{2x^2+2x-4}} \leq 3-x.$$

$[-4; -2] \cup [1; 4] \cup [5; 6]$

37. (МГУ, экономич. ф-т, 2007) Для каждого значения x , удовлетворяющего условию

$$x^2 - |x| - 42 = 0,$$

найдите все числа y , для которых выполнено неравенство

$$-7\sqrt{y^2 - 10y + 34} \geq 4x + 7.$$

Если $x = -7$, то $y = 5$; если $x = 7$, то таких y не существует

38. (МГУ, биологич. ф-т, 2003)

$$1 - \sqrt{\frac{1-x}{7-4x}} \leq x.$$

$(-\infty; \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$

39. (МГУ, мехмат, 2010)

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

$(\frac{2}{3}; \frac{5}{4}]$

40. (МГУ, ИСАА, 2006)

$$\sqrt{\frac{243+9x-2x^2}{2x+3}} > 9-x.$$

$(\frac{2}{27}; \frac{2}{3}) \cup (0; \frac{2}{3}-)$

41. (МГУ, мехмат, 2003)

$$\sqrt{\frac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}} \leq x^3.$$

$[\sqrt[4]{\frac{2}{3}}; \sqrt[4]{\frac{2}{3}}] \cap \{0\}$

42. («Физтех», 2010)

$$\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} > -x.$$

$(-1; 1)$

43. (МФТИ, 2008)

$$\sqrt{\frac{3}{3x^2 - 2x - 1}} \geq \frac{1}{2 - x}.$$

$$(\infty+; z) \cap \left[\frac{91}{81}; 1\right] \cap \left(\frac{8}{1}-; \infty-\right)$$

44. (МФТИ, 2008)

$$\sqrt{\frac{2 - \frac{13}{9}x}{2 - x}} \leq x - 1.$$

$$(\infty+; \frac{8}{8}] \cap \left[\frac{81}{81}; \frac{8}{4}\right]$$

45. (МГУ, мехмат, 1995)

$$\frac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x + 15 + 2x}} \geq 0.$$

$$\left[\frac{8}{8}; \frac{8}{8}-\right] \cap \left(\frac{8}{8}-; \frac{8}{81}-\right)$$

46. (МФТИ, 2003)

$$\sqrt{16 - \sqrt{132 - 16x^3}} < 4 - x.$$

$$\left(\frac{8}{8}; \frac{8}{81}\sqrt{\frac{8}{8}}-\right)$$

47. (МФТИ, 2006)

$$\sqrt{\sqrt{12x + \frac{169}{4}} + \frac{13}{2}} \geq x.$$

$$\left[\frac{8}{8}; \frac{81}{691}-\right]$$

48. («Физтех», 2007)

$$\frac{(\sqrt{x+4} + x - 2)(\sqrt{4x+9} + x - 3)}{\sqrt{6-x-4x^2-x^3}} \leq 0.$$

$$0$$

49. (МГУ, ИСАА, 2002) $x\sqrt{2-x} \leq x^2 - x - 2 - \sqrt{2-x}.$

$$\{z\} \cap [1-; \infty-)$$

50. (МГУ, ф-т психологии, 1993) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$

$$\left(\frac{9}{8}\sqrt{\frac{9}{8}}; 0\right)$$

51. (МГУ, ф-т фундамент. мед., 2003) $\sqrt{2-x} - \sqrt{4+x} \leq \sqrt{x+3}.$

$$\left[\frac{8}{62}\sqrt{\frac{8}{2+1}}-\right]$$

52. (МФТИ, 2001) $\sqrt{x^2 + 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$

$$\left(\frac{8}{1-21}\sqrt{\frac{8}{8}}; 1-\right] \cap [8-; \infty-)$$

53. (МГУ, экономич. ф-т, 1998) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1.$

$$\left(\frac{9}{81\sqrt{x+1}}; 1- \right] \cap [2-; \infty-)$$

54. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geq \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$

$$\boxed{\xi}$$

55. (МГУ, геологич. ф-т, 2002) $\sqrt{6x - x^2 - 8} - \sqrt{7 - 2x} \geq \sqrt{8x - x^2 - 15}.$

$$\boxed{\frac{\xi}{\eta}; \xi}$$

Дробно-иррациональные неравенства

56. (МГУ, ф-т психологии, 1999)

$$\frac{5x - 3}{\sqrt{7x - 4}} < 1.$$

$$\left(\frac{0\xi}{69\sqrt{x+1\xi}}; \frac{\eta}{4} \right)$$

57. (МГУ, ф-т гос. управления, 2005)

$$1 < \frac{\sqrt{2}(x - 4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}.$$

$$\boxed{(\infty+; \xi)}$$

58. (МГУ, ВМК, 1982)

$$\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 3x + 2.$$

$$\left[\frac{\xi}{\xi}; \frac{\xi\wedge}{1} \right) \cap \left(\frac{\xi\wedge}{1} -; \frac{\xi}{\xi} - \right]$$

59. (МГУ, физический ф-т, 2001)

$$\frac{1}{\sqrt{3 - x}} > \frac{1}{x - 2}.$$

$$\left(\xi; \frac{\xi}{2\sqrt{x+\xi}} \right) \cap (\xi; \infty-)$$

60. (МГУ, физический ф-т, 2002)

$$\frac{\sqrt{2 - x}}{3 - 2x} < 1.$$

$$\left[\xi; \frac{\xi}{\xi} \right) \cap (1-; \infty-)$$

61. (МГУ, биологич. ф-т, 2003)

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{4 - 2x} \geq -1.$$

$$\left(\infty+; \frac{\xi}{01\sqrt{x+8}} \right] \cap (\xi; \xi\wedge) \cap [\xi\wedge-; \infty-)$$

62. (МГУ, физический ф-т, 2002)

$$\frac{\sqrt{9 + 4x - x^2}}{3 - x} < 1.$$

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{13} + 2; 3 \right) \cap \left(0; \frac{1}{2} \sqrt{13} - 2 \right]$$

63. (МГУ, ИСАА, 1993)

$$\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{3 - x} \geq 1.$$

$$\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$$

64. (МГУ, ф-т психологии, 1983)

$$\frac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1 - x} < 1.$$

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{13} + 1; 1 \right) \cap \left(-5; -\frac{1}{2} \sqrt{13} - 1 \right]$$

65. (МГУ, ф-т психологии, 1998)

$$\frac{\sqrt{4x + 7} - 3x + 5}{16 - 3x^2 + 22x} \leq 0.$$

$$\left(8; \frac{6}{2\sqrt{17} + 17} \right] \cap \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right]$$

66. (МГУ, геологич. ф-т, 2003)

$$\frac{\sqrt{x^2 - 6x - 7}}{x - 7} \geq \frac{x + 1}{3}.$$

$$\left[8; 2 \right) \cap \{ 1 \} \cap \left[2; -\infty \right)$$

67. (МФТИ, 1997)

$$\frac{13 - 6x + \sqrt{4x^2 - 2x - 6}}{5 - 2x} > 1.$$

$$\left(\infty; \frac{5}{2} \right) \cap \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right] \cap \left[1; -\infty \right)$$

68. (МГУ, мехмат, 1990)

$$\frac{\sqrt{1 - x^3} - 1}{1 + x} \leq x.$$

$$\left[1; 0 \right] \cap \left(1; -2 \right]$$

69. (МГУ, ДВИ, 2011)

$$\frac{\sqrt{5x + 3} - 1}{\sqrt{3x + 2} - 1} > 1.$$

$$\left(\infty; \frac{5}{1} \right) \cap \left(\frac{5}{1}; \frac{5}{2} \right]$$

70. («Физтех», 2012)

$$\frac{2x + 8}{8 - \sqrt{x^2 - 2x + 65}} \leq 1.$$

$(-\infty; -1) \cup (1; 5]$

71. (МФТИ, 1999)

$$\frac{\sqrt{2x^3 - 22x^2 + 60x}}{x - 6} \geq 2x - 10.$$

$[\frac{7}{9}; 9) \cup \{9\} \cup [7; 0]$

72. (МФТИ, 2006)

$$\frac{\sqrt{4x^3 - 12x + 8}}{x + 1} \leq \sqrt{4x + 7}.$$

$(-\infty; -1 - \frac{\sqrt{17}}{4}] \cup (1 - \frac{\sqrt{7}}{2}; -)$

73. (МФТИ, 2007)

$$\sqrt{\frac{3 - 4x}{5 + 4x}} + \frac{\sqrt{5 + 4x}}{2\sqrt{3 - 4x} - 2} \geq 0.$$

$(\frac{7}{1}; \frac{7}{9}; -)$

74. («Ломоносов», 2010)

$$\frac{1}{\sqrt{-x - 4}} - \frac{1}{\sqrt{x + 6}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{(x + 6)(-x - 4)}}.$$

$[-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} + 2; 9; -)$

Замена переменной

75. (МГУ, геологич. ф-т, 1997)

$$30 > \frac{x}{60 - \sqrt{x}}$$

$(-\infty; -009\mathcal{E}) \cup (006; 0]$

76. (МГУ, геологич. ф-т, 1991)

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{2}{4 - \sqrt{x}}.$$

$(-\infty; -9\Gamma) \cup \{0\}$

77. (МГУ, физический ф-т, 2000) $2x^2 + \sqrt{2x^3} > x.$

$(-\infty; \frac{7}{9}\wedge - \mathcal{E})$

78. (МФТИ, 2005)

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x - \frac{2}{3}}}{x - \frac{23}{27}}} \leq \frac{1}{\sqrt{x - \frac{1}{3}}}.$$

$$\left[\frac{6}{11\sqrt{7+91}}; 1 \right] \cap \left[\frac{6}{7}; \frac{6}{7} \right)$$

79. (МГУ, химический ф-т, 1979) $\sqrt{x+3} > x+1.$

$$(1; 8-]$$

80. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) $\sqrt{x+3} > x-2.$

$$\left(\frac{7}{12\sqrt{4+9}}; 8- \right)$$

81. (МГУ, ф-т психологии, 1997) $\sqrt{x+3} > 5-2x.$

$$(\infty+; \frac{8}{68\sqrt{8-12}})$$

82. (МГУ, ф-т почвоведения, 1981) $\sqrt{4x-8} \geq x-5.$

$$[11; 2]$$

83. (МГУ, ф-т почвоведения, 1996)

$$\frac{2}{2 - \sqrt{x+3}} \leq 1.$$

$$(\infty+; 1) \cap \{8-\}$$

84. (МГУ, биологич. ф-т, 1993)

$$5\sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{7x-1}{x}.$$

$$\left(\frac{8}{7} -; \frac{8}{7} - \right)$$

85. (МГУ, химический ф-т, 2001)

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}} - \frac{x+1}{2x} \right)^2} \geq 0.$$

$$[2; 1) \cap (1; \frac{8}{7}) \cap (\frac{8}{7}; 0)$$

86. (МГУ, ФНМ, 2000)

$$\sqrt{2 - \frac{2}{x+1}} < \sqrt{2 + \frac{2}{x}} + 1.$$

$$(\infty+; 0) \cap (2-; \infty-)$$

87. (МГУ, экономич. ф-т, 1998)

$$\sqrt{x+8} \left(3 - \sqrt{8+x}\right) < \frac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}.$$

(87:11)

88. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите сумму целых чисел, являющихся решениями неравенства

$$\sqrt{6x-13} - \sqrt{3x^2-13x+13} \geq 3x^2 - 19x + 26.$$

L

89. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}}} \geq 1.$$

(∞+;8) ∩ [ε;0)

90. (МГУ, мехмат, 2002)

$$\sqrt[3]{2x - x\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{1 - 2x} \leq 0.$$

(∞+; $\frac{7}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$] ∩ [1; $\frac{7}{1}$] ∩ {0}

91. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Один из корней квадратного уравнения

$$px^2 + qx + 1 = 0 \quad (p < 0)$$

равен 2010. Решите неравенство

$$x + q\sqrt{x} + p > 0.$$

$\frac{2010}{1} < x$

Умножение на сопряжённое

92. («Физтех», 2016, 9) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}-2}{1-\sqrt{3-x}} \geq 1 + \sqrt{3-x}.$$

(7;1]

93. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2} - 2} \leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + 14x + 40} - 4}.$$

$$(\infty+; 8] \cap (8; 7] \cap [1-; 2-) \cap (2; 1-; \infty-)$$

94. («Ломоносов», 2015, 10–11) Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - x - 56} - \sqrt{x^2 - 25x + 136} < 8\sqrt{\frac{x+7}{x-8}}.$$

$$(0; 8; 1) \cap [2-; \infty-)$$

95. (МГУ, мех.мат., 2003)

$$5 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}} + 4 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}} \leq 9\sqrt{x+4}.$$

$$8-$$

96. (МГУ, ВМК, 2006)

$$11\sqrt{2x - \sqrt{48x - 144}} > 2x - 12.$$

$$\left(\frac{7}{9^{\sqrt{2x-144}}}; 9\right) \cap (9; 8]$$

97. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11)

$$4x + 2 + \sqrt{4-x} > x^2 + \sqrt{x^2 - 5x + 2}.$$

$$\left[\frac{7}{21^{\sqrt{4-x}}}; 9^{\wedge} - 7\right)$$