

## Инверсия

Хорошо известные вам преобразования плоскости — центральная и осевая симметрии, поворот, гомотетия — переводят прямую в прямую, а окружность — в окружность. Ни симметрия, ни поворот, ни гомотетия не могут перевести прямую в окружность или, наоборот, окружность в прямую, и потому с точки зрения указанных преобразований прямая и окружность являются различными объектами.

Существует, однако, замечательное преобразование — инверсия, которое переводит прямую в прямую или окружность, а окружность — в окружность или прямую. Таким образом, с точки зрения инверсии прямая и окружность оказываются одинаковыми объектами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть окружность  $\omega$  имеет центр  $O$  и радиус  $r$ . Инверсия относительно окружности  $\omega$  (называемая также инверсией с центром  $O$  и степенью  $r^2$ ) переводит произвольную точку  $M \neq O$  в точку  $M^*$ , расположенную на луче  $OM$  и такую, что  $OM \cdot OM^* = r^2$ .

Точка  $M^*$  называется *образом* точки  $M$  при указанной инверсии. Образ фигуры  $\Phi$  состоит из образов всех точек  $M$ , принадлежащих фигуре  $\Phi$ .

Инверсия с центром  $O$  есть преобразование плоскости с выколотой точкой  $O$  (поскольку образ точки  $O$  не определён). Тем не менее, мы будем допускать вольность речи и говорить об образе прямой или окружности, проходящей через  $O$ .

Простейшие свойства инверсии легко следуют непосредственно из определения.

1. Окружность  $\omega$  остаётся на месте (каждая её точка переходит сама в себя).
2. Если точка  $M$  лежит внутри окружности  $\omega$ , то её образ  $M^*$  — снаружи; наоборот, если точка  $M$  лежит снаружи  $\omega$ , то  $M^*$  — внутри.
3. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит сама в себя.
4. (*Инволютивность*) Если точка  $M$  переходит в  $M^*$ , то точка  $M^*$  переходит в  $M$  (иными словами, точки  $M$  и  $M^*$  являются образами друг друга).

**ЗАДАЧА 1.** Докажите, что при инверсии с центром  $O$ :

- 1) треугольники  $OAB$  и  $OB^*A^*$  подобны;
- 2) точки  $A, B, A^*$  и  $B^*$  лежат на одной окружности.

**ЗАДАЧА 2.** Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$ . Касательные к окружности, проходящие через точки  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $P$  является образом середины хорды  $AB$  при инверсии относительно  $\omega$ .

**ЗАДАЧА 3.** Докажите следующие свойства инверсии с центром  $O$ .

- 1) Образ прямой, не проходящей через  $O$ , есть окружность, проходящая через  $O$ .
- 2) Образ окружности, проходящей через  $O$ , есть прямая, не проходящая через  $O$ .
- 3) Образ окружности, не проходящей через  $O$ , есть окружность, не проходящая через  $O$ .

**ЗАДАЧА 4.** Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$ . Что является образом прямой  $AB$  при инверсии относительно  $\omega$ ?

**ЗАДАЧА 5.** Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?

ЗАДАЧА 6. Инверсия относительно окружности  $\omega$  оставляет окружность  $\gamma$  на месте. Что можно сказать о взаимном расположении этих окружностей?

ЗАДАЧА 7. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ .

а) Что является образом прямой  $A_1B_1$  при инверсии с центром  $C$ , которая переводит точку  $A_1$  в точку  $B$ ?

б) Прямая  $A_1B_1$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Окружность, описанная около треугольника  $CB_1B$ , пересекает высоту  $AA_1$  в точке  $Z$ . Докажите, что  $CX = CY = CZ$ .

ЗАДАЧА 8. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 9.8*) Пусть  $AH$  — высота остроугольного треугольника  $ABC$ , а точки  $K$  и  $L$  — проекции  $H$  на стороны  $AB$  и  $AC$ . Описанная окружность  $\Omega$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $KL$  в точках  $P$  и  $Q$ , а прямую  $AH$  — в точках  $A$  и  $T$ . Докажите, что точка  $H$  является центром окружности, вписанной в треугольник  $PQT$ .

ЗАДАЧА 9. (*Турнир городов, 2004, 8–9*) Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Их общая касательная (та, которая ближе к точке  $B$ ) касается окружностей в точках  $E$  и  $F$ . Прямая  $AB$  пересекает прямую  $EF$  в точке  $M$ . На продолжении  $AM$  за точку  $M$  выбрана точка  $K$  так, что  $KM = MA$ . Прямая  $KE$  вторично пересекает окружность, содержащую точку  $E$ , в точке  $C$ . Прямая  $KF$  вторично пересекает окружность, содержащую точку  $F$ , в точке  $D$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $D$  и  $A$  лежат на одной прямой.

ЗАДАЧА 10. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\Omega$  с центром  $O$ , причём  $O$  не лежит на диагоналях четырёхугольника. Описанная окружность  $\Omega_1$  треугольника  $AOC$  проходит через середину диагонали  $BD$ . Докажите, что описанная окружность  $\Omega_2$  треугольника  $BOD$  проходит через середину диагонали  $AC$ .

ЗАДАЧА 11. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 9.4*) Ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , проходящие через  $H$ , имеют общую касательную.

ЗАДАЧА 12. (*Поляра*)

1) Внутри окружности  $\omega$  с центром  $O$  взята точка  $A$ . Докажите, что геометрическим местом точек пересечения касательных, проведённых к окружности  $\omega$  в концах всевозможных хорд, проходящих через точку  $A$ , является прямая, перпендикулярная  $OA$ .

2) Указанная прямая называется *полярной* точки  $A$  относительно окружности  $\omega$ . Дайте определение полярной на языке инверсии. Что даёт это определение в случае, когда  $A$  лежит вне окружности  $\omega$ ?

ЗАДАЧА 13. Покажите, что если точка  $B$  лежит на полярной точки  $A$  относительно окружности  $\omega$ , то точка  $A$  лежит на полярной точки  $B$  относительно  $\omega$ .

ЗАДАЧА 14. Шестиугольник  $ABCDEF$  вписан в окружность. Докажите, что:

- его диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1;$$

- прямые  $AF$ ,  $BE$  и  $CD$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{ED}{DA} = 1.$$

ЗАДАЧА 15. Через точку  $T$ , лежащую вне окружности  $\omega$ , проведены две секущие к этой окружности. Докажите, что

- а) диагонали полученного вписанного четырёхугольника,
- б) продолжения двух его сторон, не лежащих на секущих, пересекаются на поляре точки  $T$  относительно  $\omega$ .

ЗАДАЧА 16. Диагонали четырёхугольника, вписанного в окружность  $\omega$ , пересекаются в точке  $S$ . Докажите, что продолжения противоположных сторон этого четырёхугольника пересекаются на поляре точки  $S$  относительно  $\omega$ .

ЗАДАЧА 17. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , пересекаются в точке  $E \neq O$ . Описанные окружности треугольников  $AOB$  и  $COD$  вторично пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что угол  $ОКЕ$  прямой.

ЗАДАЧА 18. (*Теорема о симметричной бабочке*) Через точки  $A$  и  $B$ , расположенные на окружности с центром  $O$ , проведены касательные, пересекающиеся в точке  $P$ . Прямая, проходящая через  $P$  и не проходящая через  $O$ , пересекает окружность в точках  $K$  и  $L$ . Точки  $K'$  и  $L'$  симметричны точкам  $K$  и  $L$  относительно прямой  $PO$ . Докажите, что прямые  $K'L$  и  $KL'$  пересекаются в середине хорды  $AB$ .

ЗАДАЧА 19. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 9.7*) Пусть  $O$  — одна из точек пересечения окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Окружность  $\omega$  с центром  $O$  пересекает  $\omega_1$  в точках  $A$  и  $B$ , а  $\omega_2$  — в точках  $C$  и  $D$ . Пусть  $X$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что все такие точки  $X$  лежат на одной прямой.

ЗАДАЧА 20. Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются в точке  $P$ , а продолжения боковых сторон — в точке  $T$ . Докажите, что  $P$  и  $T$  инверсны:

- а) относительно окружности, диаметром которой служит отрезок, соединяющий середины оснований трапеции;
- б) относительно окружности, описанной около трапеции.

ЗАДАЧА 21. (*Всеросс. по геометрии, 2013*) В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Точки  $M$  и  $N$  являются проекциями вершин  $B$  и  $C$  на  $AD$ . Окружность с диаметром  $MN$  пересекает  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $\angle BAX = \angle CAU$ .

ЗАДАЧА 22. Окружность  $\Omega$  проходит через центр окружности  $\omega$  и пересекает её в точках  $A$  и  $B$ . Общие касательные к этим окружностям пересекаются в точке  $C$ . Докажите, что при инверсии относительно  $\omega$  описанная окружность треугольника  $ABC$  переходит в окружность, симметричную  $\omega$  относительно  $AB$ .

ЗАДАЧА 23. (*Всеросс., 2013, финал, 11.8*) В треугольник  $ABC$  вписана окружность  $\omega$  с центром в точке  $I$ . Около треугольника  $AIB$  описана окружность  $\Gamma$ . Окружности  $\omega$  и  $\Gamma$  пересекаются в точках  $X$  и  $Y$ . Общие касательные к окружностям  $\omega$  и  $\Gamma$  пересекаются в точке  $Z$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABC$  и  $XYZ$ , касаются.

ЗАДАЧА 24. Четырёхугольник описан около окружности. Покажите, что образами вершин четырёхугольника при инверсии относительно этой окружности служат вершины параллелограмма.

ЗАДАЧА 25. (*Всеросс. по геометрии, 2014*) Пусть четырёхугольник  $ABCD$  описан около окружности с центром  $I$ . Касательные к описанной окружности треугольника  $AIC$  в точках  $A, C$  пересекаются в точке  $X$ . Касательные к описанной окружности треугольника  $BID$  в точках  $B, D$  пересекаются в точке  $Y$ . Докажите, что точки  $X, I, Y$  лежат на одной прямой.

ЗАДАЧА 26. Окружность  $\omega$  с центром  $I$  касается сторон  $AB, BC, CD, DA$  четырёхугольника  $ABCD$  в точках  $K, L, M, N$  соответственно.

1) Докажите, что если прямые  $AB, CD$  и  $LN$  пересекаются в одной точке, то прямые  $AD, BC$  и  $KM$  также пересекаются в одной точке.

2) Докажите, что радикальная ось окружности  $\omega$  и описанной окружности  $\gamma$  треугольника  $AID$  проходит через середины отрезков  $KN$  и  $MN$ .

ЗАДАЧА 27. (*Всеросс. по геометрии, 2014*) В четырёхугольнике  $ABCD$  вписанная окружность  $\omega$  касается сторон  $BC$  и  $DA$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Оказалось, что прямые  $AB, FE$  и  $CD$  пересекаются в одной точке  $S$ . Описанные окружности  $\Omega$  и  $\Omega_1$  треугольников  $AED$  и  $BFC$  вторично пересекают окружность  $\omega$  в точках  $E_1$  и  $F_1$ . Докажите, что прямые  $EF$  и  $E_1F_1$  параллельны.

ЗАДАЧА 28. (*Турнир городов, 2005, 10–11*) Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с  $OD$ . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Доказать, что углы  $AOE$  и  $DOF$  равны.

ЗАДАЧА 29. (*Турнир городов, 2011, 10–11*) Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  являются соответственно хордами окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг  $AB$  и  $CD$  равны  $\alpha$  и  $\beta$ . Окружности  $\omega_3$  и  $\omega_4$  также имеют хорды  $AB$  и  $CD$  соответственно. Их дуги  $AB$  и  $CD$ , расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры  $\beta$  и  $\alpha$ . Докажите, что  $\omega_3$  и  $\omega_4$  тоже касаются.

ЗАДАЧА 30. (*Всеросс. по геометрии, 2006, 10.3*) Дана окружность и точка  $P$  внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке  $P$ . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.