Инварианты

1. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 8.6*) Четыре блохи играют в чехарду на большом листе клетчатой бумаги. Каждую секунду одна из блох перепрыгивает через какую-то другую и, летя над той же прямой, пролетает расстояние, вдвое большее, чем было между блохами до прыжка. Сейчас блохи сидят в четырёх вершинах одной клетки. Могут ли все четыре блохи через некоторое время оказаться на одной прямой?

2. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8*) Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочерёдно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*)

3. (*Турнир городов, 1993, 10–11*) Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах. Например: $(12, 3, 5) \to (12, 20, 5)$ (или $(4, 3, 5)$). Можно ли, начав с куч 1993, 199 и 19, сделать одну из куч пустой?

$\boxed{\text{Нет}}$

4. (*ММО, 1999, 9*) На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня.

$\boxed{2}$

5. (*Турнир городов, 1987, 7–8*) В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, то есть симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3, но в другом углу:

а) левом верхнем,

б) правом верхнем?

$\boxed{\text{В обоих случаях — нет}}$

6. (*Турнир городов, 1995, 8–9*) Три кузнечика сидят на прямой так, что два крайних отстоят на 1 м от среднего. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то $AB = BA_1$). Через некоторое время кузнечики оказались на тех же местах, что и вначале, но в другом порядке. Докажите, что поменялись местами крайние кузнечики.

7. (*Турнир городов, 2004, 8–9*) а) Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 л сиропа, в другом — 20 л воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. Как получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

б) То же, но воды — N л. При каких целых N можно получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

При любом $N \geqslant 7$, не кратном 3

8. (*ММО, 1993, 8*) На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

Нет

9. (*ММО, 1995, 8*) Несколько населённых пунктов соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех населённых пунктов. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

10. (*ММО, 1993, 9*) Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

Нет

11. (*Турнир городов, 2012, 8–9*) У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных?

Нет

12. (*Всеросс., 2015, МЭ, 10*) В одной из вершин шестиугольника лежит золотая монета, а в остальных ничего не лежит. Кощей Бессмертный чахнет над златом и каждое утро снимает с одной вершины произвольное количество монет, после чего тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монет. Если к исходу какого-то дня во всех вершинах будет поровну монет, Кощей станет Властелином Мира. Докажите, что хоть злата у него сколько угодно, но Властелином Мира ему не бывать.

13. (*Всеросс., 2002, округ, 8*) Написанное на доске четырёхзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

Нет

14. (*Problems.ru*) Имеются два стакана, в первом стакане налито некоторое количество воды, а во втором — такое же количество спирта. Разрешается переливать некоторое количество жидкости из одного стакана в другой (при этом раствор равномерно перемешивается). Можно ли с помощью таких операций получить в первом стакане раствор, в котором процентное содержание спирта больше, чем во втором?

Нет

15. (*Турнир городов, 1987, 7–10*) Имеются два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

Нет

16. (*Турнир городов, 1994, 8–11*) Десять фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу — синие. Разрешены две операции:

а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд;

б) перевернуть четыре фишки, расположенные так: $**0**$ ($*$ — фишка, входящая в четвёрку, 0 — не входящая).

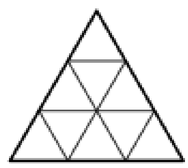
Удастся ли, используя несколько раз разрешённые операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?

Нет

17. (*Турнир городов, 2013, 8–11*) Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

Нет

18. (*Всеросс., 2015, регион, 9*) Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа n, $n+1$, $\ldots$, $n+8$. При каких n он сможет это сделать?



Только при $n = 2$

19. (*Турнир городов, 1985, 7–10*) На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Нет

20. (*ММО, 2013, 10*) На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?

$\boxed{10}$

21. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Четыре кузнечика сидели в вершинах квадрата. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ равны). Докажите, что три кузнечика не могут оказаться

а) на одной прямой, параллельной стороне квадрата;

б) на одной произвольной прямой.

22. (*Турнир городов, 1991, 10–11*) На доске выписаны числа 1, 1/2, 1/3, ..., 1/100. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число $a+b+ab$. Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.

$\boxed{100}$

23. (*Турнир городов, 1985, 9–10*) В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число $+1$ (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали. Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?

$\boxed{\text{Нет}}$

24. (*ММО, 2014, 9*) На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: A_1, A_2, ..., A_{10}, причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности. Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает вдоль окружности через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик. Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках A_1, A_2, ..., A_9, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}?

$\boxed{\text{Да}}$

25. (*Всеросс., 1995, финал, 9*) Имеются три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

$\boxed{0}$

26. (*Турнир городов, 2010, 10–11*) На плоскости лежит игла. Разрешается поворачивать иглу на 45° вокруг любого из ее концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того, чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом ее концы поменялись местами?

Нет

27. (*Всеросс., 1994, округ, 10*) Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй — на треть, третий — на четверть, четвёртый — на 1/5, пятый — на 1/8, шестой — на 1/9, и седьмой — на 1/10. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным

а) на 1/12;

б) на 1/6?

а) Да; б) нет

28. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1 g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.

29. (*Турнир городов, 1980*) На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Пусть первоначально было всего две красные точки (менее двух точек оставлять не разрешается). Доказать, что за несколько разрешённых операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.

30. (*ММО, 1997, 11*) На доске написаны три функции:

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = (x-1)^2.$$

Можно складывать, вычитать и перемножать эти функции (в том числе возводить в квадрат, в куб, ...), умножать их на произвольное число, прибавлять к ним произвольное число, а также проделывать эти операции с полученными выражениями.

а) Получите таким образом функцию $1/x$.

б) Докажите, что если стереть с доски любую из функций f_1, f_2, f_3, то получить $1/x$ невозможно.

31. (*Всеросс., 2014, финал, 11*) Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида $x^n - 1$?

Нет