Метод интервалов

Метод интервалов — это метод решения так называемых *рациональных неравенств*. Общее понятие рационального неравенства мы обсудим позже, а сейчас начнём с простых примеров.

Знаки линейной функции

Напомним прежде всего, что функция $f(x) = ax + b$ называется *линейной*. Если $a \neq 0$, то линейная функция называется также *многочленом первой степени*.

Пример 1. Рассмотрим линейную функцию $f(x) = x - 2$. Ясно, что её значения положительны при $x > 2$ и отрицательны при $x < 2$. В точке $x = 2$ наша функция обращается в нуль: $f(2) = 0$. Иными словами, значение $x = 2$ является *нулём*[1] функции $f(x)$.

Знаки функции $f(x) = x - 2$ показаны на рис. 1. Описывая такую ситуацию, мы говорим, что наша функция *меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку* $x = 2$.

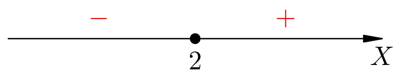


Рис. 1. Знаки функции $f(x) = x - 2$

Пример 2. Точно так же линейная функция $f(x) = 3x + 4$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x = -4/3$ (рис. 2).

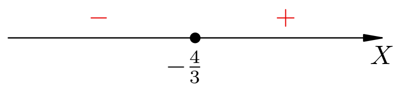


Рис. 2. Знаки функции $f(x) = 3x + 4$

Графическая иллюстрация данных примеров очевидна. Графиком линейной функции служит прямая. Эта прямая по одну сторону от нуля функции идёт ниже оси X, а по другую сторону — выше оси X.

Так, прямая $y = x - 2$ слева от точки $x = 2$ идёт ниже оси X (там $y < 0$ и стоит знак минус), а справа от этой точки идёт выше оси X (там $y > 0$ и стоит знак плюс, рис. 3).

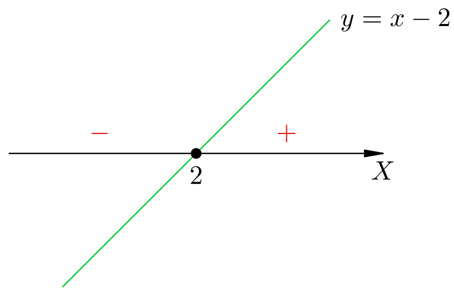


Рис. 3. Знаки функции $f(x) = x - 2$

Итак, отмечаем важный факт: *выражение* $x - x_0$ *при переходе через точку* x_0 *меняет знак с минуса на плюс*. Этот факт лежит в основе метода интервалов, и мы будем постоянно пользоваться им в дальнейшем.

[1] Вообще, число x_0 называется *нулём* функции $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Знаки квадратичной функции

Теперь перейдём к рассмотрению *квадратичной* функции, то есть функции вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где $a \neq 0$. Другое название квадратичной функции — *многочлен второй степени.*

Нули функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Если x_1 и x_2 — корни этого уравнения, то имеет место разложение квадратного трёхчлена на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Нас интересует, на каких промежутках эта функция принимает положительные значения, а на каких — отрицательные.

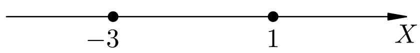
Решая квадратное уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$, находим нули функции: $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Следовательно, функцию можно представить в виде:

$$f(x) = (x + 3)(x - 1). \tag{1}$$

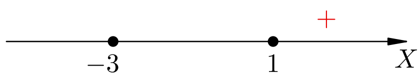
Точки $x = -3$ и $x = 1$ разбивают числовую ось на три промежутка:

$$x \leqslant -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant 1, \quad x \geqslant 1.$$

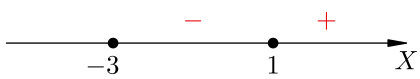
Прежде всего изобразим это на рисунке:



Определим знак выражения (1) на каждом из этих промежутков. Если $x > 1$, то оба множителя в (1) положительны, так что получается знак плюс:



Если $-3 < x < 1$, то первый множитель в (1) по-прежнему положителен, а второй становится отрицательным. Знак произведения — минус:



Наконец, если $x < -3$, то оба множителя в (1) отрицательны. Знак произведения — плюс, и мы получаем окончательную картину знаков функции (1) на рис. 4.

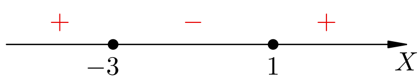


Рис. 4. Знаки выражения $(x + 3)(x - 1)$

Мы применили здесь не что иное, как *метод интервалов.* Данный метод, как видите, заключается в последовательном определении знака произведения по знакам сомножителей на различных промежутках.

Графическая интерпретация картины знаков, полученной на рис. 4, достаточно очевидна. Графиком нашей функции $y = x^2 + 2x - 3$ служит парабола, пересекающая ось X в точках -3 и 1. Ветви параболы направлены вверх (рис. 5).

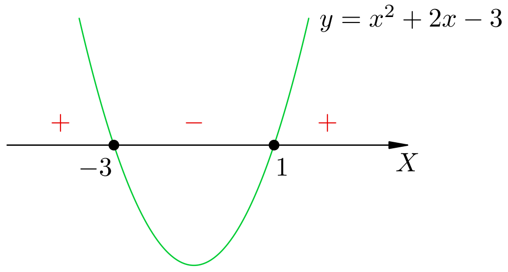


Рис. 5. Знаки функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$

На интервалах $x < -3$ и $x > 1$ парабола идёт выше оси X; там $y > 0$ и стоит знак плюс. На интервале $-3 < x < 1$ парабола идёт ниже оси X; там $y < 0$ и стоит знак минус.

Квадратные неравенства

Обратите внимание, что мы попутно научились решать квадратные неравенства, причём двумя способами — методом интервалов и графически (с помощью параболы).

Пример 4. Решить неравенство: $2x^2 - 5x + 2 > 0$.

Решение. Находим корни квадратного трёхчлена:

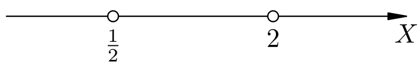
$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1/2$ и $x_2 = 2$. Ну а дальше — кому какой способ больше нравится.

Первый способ: метод интервалов. Раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) > 0.$$

Точки $1/2$ и 2 разбивают ось X на три промежутка:



Заметьте, что точки $1/2$ и 2 выколоты. Это связано с тем, что решаемое неравенство — строгое (так что x не может равняться $1/2$ или 2).

Далее действуем как в предыдущем примере: определяем знаки левой части неравенства на каждом из промежутков (рис. 6).

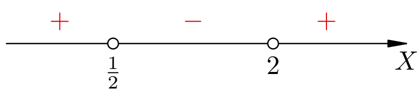


Рис. 6. Знаки выражения $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$

Получаем: $x < \frac{1}{2}$ или $x > 2$.

Второй способ: графический. Рисуем эскиз параболы $y = 2x^2 - 5x + 2$ (рис. 7).

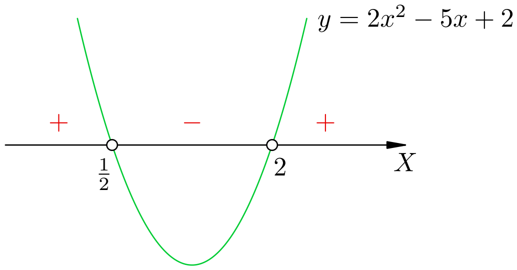


Рис. 7. Знаки функции $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Поскольку в неравенстве стоит знак *больше*, нас интересуют те значения x, при которых парабола идёт *выше* оси X. Мы видим, что это $x < \dfrac{1}{2}$ или $x > 2$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство: $8 + 2x - x^2 \geqslant 0$.

Решение. Давайте возьмём за правило: если перед старшей степенью x стоит минус — немедленно меняем знаки, умножая неравенство на -1. Получим:

$$x^2 - 2x - 8 \leqslant 0.$$

Дальнейшее труда не представляет, и вы легко справитесь самостоятельно.

Ответ: $[-2; 4]$.

Пример 6. Решить неравенство: $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Решение. Заметим, что в левой части стоит полный квадрат: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Неравенство, таким образом, имеет вид:

$$(x - 2)^2 > 0.$$

Ну а квадрат числа положителен всегда, когда число не равно нулю. Следовательно, решениями данного неравенства служат все значения x кроме 2.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Графически данная ситуация представлена на рис. 8.

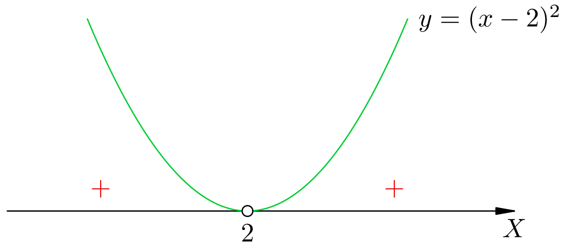


Рис. 8. Знаки функции $f(x) = (x - 2)^2$

Мы видим, что вершина параболы $y = (x-2)^2$ расположена на оси X в точке $x = 2$. Парабола касается оси X в этой точке, а при всех остальных значениях x идёт выше оси X (то есть в области $y > 0$). Точка 2 выколота, так как неравенство строгое.

Попутно отметим важный факт: *выражение* $(x - x_0)^2$ *не меняет знак при переходе через точку* x_0.

Пример 7. Решить неравенство: $x^2 + 2x + 3 > 0$.

Решение. Дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + 2x + 3$ отрицателен. Это означает, что уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$ не имеет корней. Как же тогда решать исходное неравенство?

Всё очень просто. Выделим в нашем квадратном трёхчлене полный квадрат:

$$x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2.$$

Неравенство приобретает вид:

$$(x + 1)^2 + 2 > 0.$$

Квадрат всегда неотрицателен, да ещё плюс 2 — это всегда будет положительное число. Следовательно, данное неравенство выполнено при любых значениях x.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

И здесь несложно дать графическое объяснение. Поскольку уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$ не имеет корней, парабола $y = x^2 + 2x + 3$ не пересекает ось X. Ветви параболы при этом направлены вверх — значит, парабола расположена *целиком выше* оси X (рис. 9). Значит, функция $f(x) = x^2 + 2x + 3$ принимает только положительные значения.

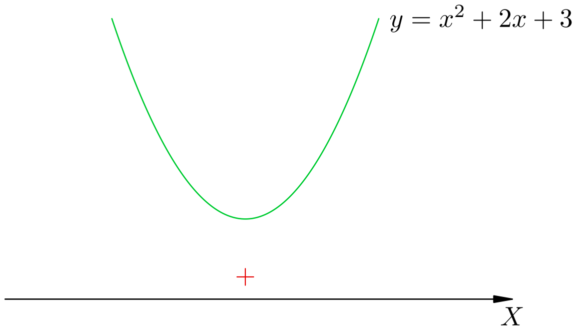


Рис. 9. График функции $y = x^2 + 2x + 3$

Попутно отмечаем ещё один важный факт: *квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, у которого $a > 0$ и дискриминант отрицателен, принимает только положительные значения.*

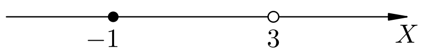
Решение неравенств методом интервалов

В случае квадратных неравенств мы не видели особой разницы между методом интервалов и графическим способом решения: и то, и другое было весьма просто. Далее мы будем рассматривать неравенства, которые удобнее всего решать именно методом интервалов.

Пример 8. Решить неравенство: $\dfrac{x+1}{x-3} \leqslant 0$.

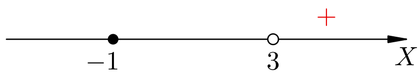
Решение. Действуем точно так же, как в примере 3. Ещё раз подробно опишем все шаги.

Числитель обращается в нуль в точке $x = -1$. Знаменатель обращается в нуль в точке $x = 3$. Эти две точки разбивают ось X на три интервала:

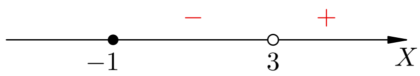


Точка -1 закрашена: неравенство нестрогое и, следовательно, числителю разрешается быть равным нулю (иными словами, $x = -1$ является решением неравенства). Точка 3 выколота: на нуль делить нельзя, и потому $x = 3$ не является решением неравенства (при $x = 3$ левая часть неравенства не определена).

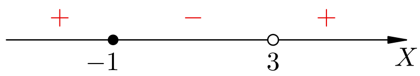
Теперь идём по оси X справа налево. Если $x > 3$, то оба выражения $x - 3$ и $x + 1$ положительны. Общий знак — плюс:



Перейдём в интервал $-1 < x < 3$. Выражение $x - 3$ поменяет знак и станет отрицательным, а выражение $x + 1$ по-прежнему положительно. Общий знак — минус:



На интервале $x < -1$ выражение $x - 3$ продолжает быть отрицательным; также отрицательным станет и $x + 1$. Общий знак — плюс:

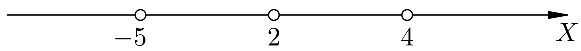


Знак неравенства — «меньше или равно». Следовательно, решения неравенства расположены там, где стоит знак минус.

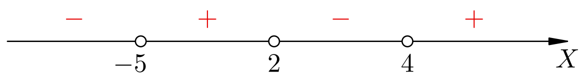
Ответ: $[-1; 3)$.

Пример 9. Решить неравенство: $(x + 5)(x - 2)(x - 4) > 0$.

Решение. Отмечаем на числовой оси точки -5, 2 и 4 — нули всех линейных множителей левой части. Эти точки разбивают ось X на четыре интервала:



Все точки выколоты, так как неравенство строгое. При переходе через каждую из этих точек ровно один линейный множитель меняет знак, поэтому имеем чередование знаков:



Ответ: $(-5; 2) \cup (4; +\infty)$

Пример 10. Решить неравенство: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{6 + x - x^2} \geqslant 0$.

Решение. Как мы договаривались выше, сделаем «от греха подальше» знак плюс перед x^2 в знаменателе. Для этого умножим обе части неравенства на -1:

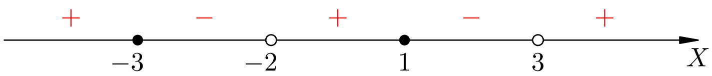
$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 6} \leqslant 0.$$

Находим нули числителя: $x^2 + 2x - 3 = 0$, откуда $x = 1$ и $x = -3$. Находим нули знаменателя: $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x = -2$ и $x = 3$. Раскладываем числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 2)(x - 3)} \leqslant 0.$$

Мы привели неравенство к виду, *приспособленному для метода интервалов*: справа стоит нуль, а слева в числителе и знаменателе имеем произведение линейных множителей.

Остаётся отметить нули числителя и знаменателя на числовой оси и расставить знаки:



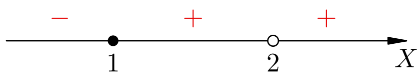
Точки -3 и 1 закрашены — это нули числителя и, соответственно, решения неравенства (оно ведь нестрогое). Точки -2 и 3 выколоты как нули знаменателя. Имеет место чередование знаков, поскольку при переходе через каждый нуль числителя или знаменателя ровно один из линейных множителей меняет знак.

Ответ: $[-3;-2) \cup [1;3)$.

Чередование знаков в методе интервалов присутствует часто, но далеко не всегда. Например, если какой-либо линейный множитель стоит в квадрате, то чередование нарушается.

Пример 11. Решить неравенство: $\dfrac{x-1}{(x-2)^2} \leqslant 0$.

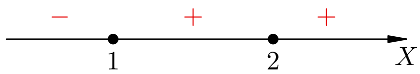
Решение. При переходе через точку $x=1$ происходит обычная смена знака. А вот при переходе через точку $x=2$ смены знака нет, поскольку выражение $(x-2)^2$ знак не меняет! Картина знаков левой части неравенства получается такой:



Ответ: $(-\infty;1]$.

Пример 12. Решить неравенство: $(x-1)(x-2)^2 \leqslant 0$.

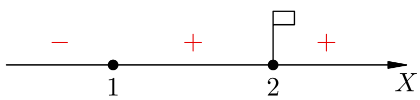
Решение. Как будто бы всё то же самое — только $(x-2)^2$ переместилось из знаменателя в числитель. Вследствие этого точка $x=2$ стала закрашенной:



Картина знаков остаётся той же, но если здесь воспроизвести ответ предыдущего неравенства, то это будет ошибкой. Теперь значение $x=2$ оказывается решением неравенства! В самом деле, подставляем $x=2$ в исходное неравенство и получаем верное числовое неравенство $0 \leqslant 0$.

Ответ: $(-\infty;1] \cup \{2\}$.

Как видите, при нарушении чередования знаков надо быть очень внимательным и не забывать, что *любая закрашенная точка является решением неравенства*. Если при переходе через закрашенную точку не происходит смены знака, то немедленно ставьте в этой точке флажок:



Этот флажок потом напомнит вам, что данную точку нужно включить в ответ.

Пример 13. Решить неравенство: $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-4} \geqslant 0$.

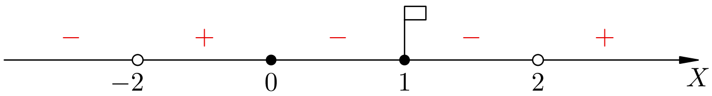
Решение. Преобразуем левую часть:

$$\frac{x(x^2-2x+1)}{(x+2)(x-2)} \geqslant 0,$$

или

$$\frac{x(x-1)^2}{(x+2)(x-2)} \geqslant 0.$$

Изображаем на числовой оси нули числителя и знаменателя, расставляем знаки и не забываем про флажок:



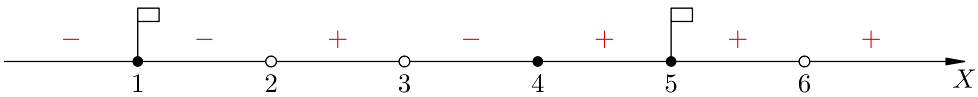
Ответ: $(-2;0] \cup \{1\} \cup (2;+\infty)$.

Вообще, при расстановке знаков удобно пользоваться следующим правилом:

- если линейный множитель $x-x_0$ стоит в нечётной степени, то при переходе через точку x_0 знак меняется;
- если линейный множитель $x-x_0$ стоит в чётной степени, то при переходе через точку x_0 знак не меняется.

Пример 14. Решить неравенство: $\dfrac{(x-1)^2(x-4)^3(x-5)^4}{(x-2)(x-3)^5(x-6)^6} \geqslant 0.$

Решение. Расставляем знаки и флажки:



Как мы расставили знаки? Проще всего действовать так. Пусть сначала $x>6$. Тогда все множители положительны, и общий знак — плюс. Затем идём влево по числовой оси. При переходе через точки 6, 5 и 1 знак не меняется, так как соответствующие линейные множители стоят в чётных степенях. При переходе через точки 4, 3 и 2 знак меняется, поскольку соответствующие линейные множители стоят в нечётных степенях.

При переходе через закрашенные точки 1 и 5 смены знака нет; в этих точках поставлены флажки. Флажок в точке 5 оказывается на самом деле несущественным — он находится внутри промежутка решений.

Ответ: $\{-1\} \cup (2;3) \cup [4;6) \cup (6;+\infty)$.

Пример 15. Решить неравенство: $\dfrac{x^3-2x^2+5x}{x^2-4} \geqslant 0.$

Решение. В левой части получаем:

$$\frac{x(x^2-2x+5)}{(x+2)(x-2)} \geqslant 0.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена x^2-2x+5 отрицателен; следовательно, $x^2-2x+5>0$ при всех x, и наше неравенство равносильно следующему:

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)} \geqslant 0.$$

Полученное неравенство вы без труда решите самостоятельно.

Ответ: $(-2;0] \cup (2;+\infty)$.

Во всех неравенствах, которые мы до сих пор рассматривали, справа стоял нуль. Если же справа стоит ненулевая величина, то переносим её влево с минусом и дальнейшими преобразованиями приводим неравенство к виду, приспособленному для метода интервалов.

Пример 16. Решить неравенство: $\dfrac{x}{x-4} < 3$.

Решение. Очень распространённая ошибка в таких случаях: «умножим неравенство на $x - 4$». Делать этого (с сохранением знака неравенства) нельзя: мы же не знаем, какой знак имеет величина $x - 4$ (а в зависимости от её знака при умножении на $x - 4$ знак неравенства либо сохранится, либо изменится на противоположный).

Мы приведём данное неравенство к виду, приспособленному для метода интервалов. Последовательно преобразуем:

$$\frac{x}{x-4} - 3 < 0, \quad \frac{-2x+12}{x-4} < 0, \quad \frac{2(x-6)}{x-4} > 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов.

Ответ: $(-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$.

Пример 17. Решить неравенство: $\dfrac{4}{x+3} > \dfrac{3}{x-1}$.

Решение. Не «переворачиваем» дроби, не «перемножаем крест-накрест, как пропорцию»! Собираем слагаемые в одной части:

$$\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x-1} > 0.$$

После очевидных преобразований получаем:

$$\frac{x-13}{(x+3)(x-1)} > 0.$$

Дальнейшее труда не представляет.

Ответ: $(-3; 1) \cup (13; +\infty)$.

Метод интервалов и рациональные неравенства

Теперь, после всех рассмотренных примеров, нам уже более-менее ясно, неравенства какого вида могут решаться методом интервалов. Дадим соответствующие определения.

Многочлен степени n — это выражение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$. Например, если $a \neq 0$, то:

- число a — многочлен нулевой степени,
- $ax + b$ — многочлен первой степени,
- $ax^2 + bx + c$ — многочлен второй степени,
- $ax^3 + bx^2 + cx + d$ — многочлен третьей степени,

и так далее.

Рациональная функция — это отношение двух многочленов. Вот несколько примеров рациональных функций:

$$f(x) = \frac{3x-1}{x^2+x+3}, \quad f(x) = \frac{2x^5-3x^2+4}{x^3-7}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Рациональные функции обладают рядом хороших свойств. Так, сумма, разность, произведение или частное рациональных функций — снова рациональная функция.

Рациональное неравенство — это неравенство вида

$$f(x) \leqslant 0, \tag{2}$$

где $f(x)$ — рациональная функция. При этом вместо знака $\leqslant$ может стоять любой другой знак неравенства: $\geqslant$, $<$, $>$.

К неравенству вида (2) сводится неравенство с ненулевой правой частью:

$$f(x) \leqslant g(x), \tag{3}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные функции. Действительно, переносим $g(x)$ с минусом влево:

$$f(x) - g(x) \leqslant 0.$$

После приведения дробей к общему знаменателю слева получается рациональная функция, и мы, таким образом, имеем неравенство вида (2).

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств. Алгоритм действий во всех случаях одинаков.

1. Если неравенство содержит рациональные функции в обеих частях, то собираем все слагаемые в одной части (например, в левой).

2. Приводим все слагаемые к общему знаменателю. В левой части неравенства получаем дробь, знаменатель которой уже разложен на множители. В правой части стоит нуль.

3. Раскладываем числитель полученной дроби на множители. Тем самым неравенство приводится к виду, приспособленному для метода интервалов.

4. Отмечаем на числовой оси нули числителя и знаменателя. Нули знаменателя выколоты. Нули числителя выколоты, если неравенство строгое, и закрашены, если неравенство нестрогое.

5. Расставляем знаки на полученных интервалах. Если множитель $x - x_0$ стоит в нечётной степени, то при переходе через точку x_0 знак меняется. В случае чётной степени знак не меняется.

6. Если при переходе через закрашенную точку знак не меняется, то ставим в этой точке флажок.

7. Записываем ответ, не забывая про флажки. Если флажок оказался внутри промежутка решений, то он «поглощается» этим промежутком. Если флажок не находится внутри промежутка решений, он даёт изолированную точку-решение.