Неравенства

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.1*) Миша, Петя, Коля и Вася играли в «подкидного дурака», всего сыграли 16 партий. Каждый остался «в дураках» хотя бы один раз. Известно, что больше всех оставался Миша, а Петя и Коля в сумме остались 9 раз. Сколько раз остался «в дураках» Вася?

Один раз

2. (*«Ломоносов», 2016, 5–6.2; 7–8.1*) На сколько недель может накладываться год? Считаем, что год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на данный год.

53 или 54

3. (*Московская устная олимпиада, 2003, 6.1*) Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

37

4. (*Московская устная олимпиада, 2017, 6–7.1*) В Стране дураков ходят монеты в 1, 2, 3, ..., 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя монетами разного достоинства. Буратино хотел купить третье такое же мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?

7 сольдо

5. (*«Курчатов», 2015, 6.2*) Пятерых детей выстроили в шеренгу и раздали им 40 конфет. У детей, стоящих слева от Данила — 35 конфет, справа от Люды — 23, слева от Максима — 30, справа от Саши — 32 конфеты. Пятого ребенка зовут Валя. Сколько конфет может быть у неё? (Ответ объясните.)

13

6. (*Математический праздник, 2018, 6.2*) Незнайка выписал семь двузначных чисел в порядке возрастания. Затем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось вот что: ХА, АЙ, АХ, ОЙ, ЭМ, ЭЙ, МУ. Докажите, что Незнайка что-то перепутал.

7. (*«Ломоносов», 2017, 5–6.3, 7–8.2*) А у нас сегодня кошка родила вчера котят! Известно, что два самых лёгких весят в сумме 80 г, четыре самых тяжёлых — 200 г, а суммарный вес всех котят равен 500 г. Сколько котят родила кошка?

11

8. (*Математический праздник, 2006, 6.3*) Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

На третий

9. (*Математический праздник, 2001, 6.3*) Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Этой коробки Наташе хватило на 41 чашку чая, а Инне — на 58. Сколько пакетиков было в коробке?

20

10. (*Математический праздник, 1997, 6.3, 7.4*) В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

19 рыжиков и 11 груздей

11. (*Московская устная олимпиада, 2014, 6.3*) На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у россиян, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

12. (*Московская устная олимпиада, 2011, 6.3*) Волшебным считается момент, в который число минут на электронных часах совпадает с числом часов. Чтобы сварить волшебное зелье, его надо и поставить на огонь, и снять с огня в волшебные моменты. А чтобы оно получилось вкусным, его надо варить от полутора до двух часов. Сколько времени варится вкусное волшебное зелье?

13. (*Московская устная олимпиада, 2006, 6.3*) Пятеро друзей скинулись на покупку. Может ли оказаться так, что любые два друга в сумме внесли менее трети стоимости покупки?

14. (*Московская устная олимпиада, 2016, 6.4*) В классе учатся 27 человек, но на урок физкультуры пришли не все. Учитель разбил пришедших на две равные по численности команды для игры в пионербол. При этом в первой команде была половина всех пришедших мальчиков и треть всех пришедших девочек, а во второй — половина всех пришедших девочек и четверть всех пришедших мальчиков. Остальные пришедшие ребята помогали судить. Сколько помощников могло быть у судьи?

15. (*Московская устная олимпиада, 2013, 6.4*) Если каждой девочке дать по одной шоколадке, а каждому мальчику по две, то шоколадок хватит. А если каждому мальчику дать по одной шоколадке, а каждой девочке по две, то их не хватит. А если девочкам не давать вообще, то хватит ли каждому мальчику по три шоколадки?

16. (*Математический праздник, 1993, 6.5*) Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Фёдором и котом, то кот станет крайним слева. В каком порядке они сидят?

17. (*Московская устная олимпиада, 2008, 6.5*) У папы Карло есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек — пароход, из 14 дощечек — самолёт. Самолёт стоит 19 золотых, пароход — 8 золотых, мельница — 6 золотых. Какое наибольшее количество золотых может заработать папа Карло?

18. (*Математический праздник, 1994, 6.6*) Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причём Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

5

19. (*Московская устная олимпиада, 2003, 6.6*) На каждом километре между сёлами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой — расстояние до Рощино. Останавливаясь у каждого столба, Бобик заметил, что если сложить все цифры, записанные на обеих сторонах таблички, то получится 13. Найдите расстояние между сёлами.

20. (*Московская устная олимпиада, 2016, 6.7*) Вася живет в многоквартирном доме. В каждом подъезде дома одинаковое количество этажей, на каждом этаже по четыре квартиры, каждая квартира имеет одно-, дву- или трёхзначный номер. Вася заметил, что количество квартир с двузначным номером у него в подъезде в десять раз больше количества подъездов в доме. Сколько всего квартир может быть в этом доме?

160, 900, 936 или 972

21. (*Московская устная олимпиада, 2006, 6.7*) Илья Муромец помнит, что на то, чтобы нейтрализовать 10-голового огнедышащего дракона, достаточно четырёх огнетушителей. А для того, чтобы нейтрализовать 16-голового дракона, достаточно семи огнетушителей. Какое наименьшее количество огнетушителей нужно для того, чтобы нейтрализовать 19-голового дракона?

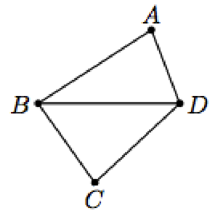
22. (*«Курчатов», 2015, 7.1*) Пятерых детей выстроили в шеренгу и раздали им 111 конфет. У детей, стоящих слева от Данила — 96 конфет, справа от Люды — 57, слева от Максима — 69, справа от Саши — 75 конфет. Пятого ребенка зовут Валя. Как зовут того, кому досталось больше всего конфет, и сколько у него конфет?

Саша, 36 конфет

23. (*Московская устная олимпиада, 2016, 7.2*) В комнате у Папы Карло на каждой стене висят часы, причём они все показывают неверное время: первые часы ошибаются на 2 минуты, вторые — на 3 минуты, третьи — на 4 минуты и четвёртые — на 5 минут. Однажды Папа Карло, выходя на улицу, решил узнать точное время и увидел такие показания часов: 14 : 54, 14 : 57, 15 : 02 и 15 : 03. Помогите Папе Карло определить точное время.

14 : 59

24. (*Московская устная олимпиада, 2012, 7.2*) На карте обозначены 4 деревни: A, B, C и D, соединённые тропинками (см. рисунок). В справочнике указано, что на маршрутах $A - B - C$ и $B - C - D$ есть по 10 колдобин, на маршруте $A - B - D$ колдобин 22, а на маршруте $A - D - B$ колдобин 45. Туристы хотят добраться из A в D так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо двигаться?



25. (*Математический праздник, 2001, 7.3*) Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал два подъезда и добавил три этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать ещё два подъезда и добавить ещё три этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

Да

26. (*Турнир Архимеда, 2016.3*) Вася и Петя задумали по 5 натуральных чисел, причем все 10 задуманных чисел оказались различными. Среднее арифметическое чисел Васиного набора равно наибольшему числу Петиного набора. Может ли среднее арифметическое чисел Петиного набора быть равно

а) наименьшему числу Васиного набора;

б) наибольшему числу Васиного набора?

а) Да; б) нет

27. (*«Курчатов», 2014, 7.3*) От двух игрушечных азбук осталось всего 14 букв. Каждая буква первой азбуки тяжелее любой буквы из второй, но если буквы взяты из одной и той же азбуки, то весят поровну. Известно, что составленное из этих букв слово `ЦИРКУЛЬ` легче, чем слово `ЧАСТНОЕ`, слово `ЧАСТЬ` легче, чем `КРЕСТ`, а буква `Е` легче `Ь`. Определите все тяжёлые буквы.

`СТРОНЬК`

28. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.3*) Пётр Петрович и Иван Иванович ехали вместе в поезде. Каждый из них сначала смотрел в окно, потом читал газету, потом разгадывал кроссворд и под конец пил чай. Только у Петра Петровича на каждое следующее занятие уходило вдвое больше времени, чем на предыдущее, а у Ивана Ивановича — в 4 раза. Начали смотреть в окно они одновременно и кончили пить чай также одновременно. Что делал Пётр Петрович, когда Иван Иванович приступил к кроссворду?

Смотрел в окно

29. (*Всеросс., 2015, II этап, 7.4*) Биолог последовательно рассаживал 150 жуков в десять банок. Причём в каждую следующую банку он сажал жуков больше, чем в предыдущую. Количество жуков в первой банке составляет не менее половины от количества жуков в десятой банке. Сколько жуков в шестой банке?

16

30. (*Математический праздник, 2010, 7.4*) В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

13

31. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.5*) Али-Баба и 40 разбойников делят добычу. Делёж считается справедливым, если любым 30 участникам достаётся в сумме не менее половины добычи. Какая наибольшая доля может достаться Али-Бабе при справедливом дележе?

32. (*Московская устная олимпиада, 2006, 7.6*) На спортивном празднике ученики седьмых классов парами соревновались в беге по следующим правилам. По команде два человека начинают бежать с места старта в разные стороны по круговой дорожке стадиона. Финишем считается момент их встречи. Саша и Юра пробежали круг за 45 секунд. Две Алёны начали бежать с постоянными скоростями (не обязательно равными), но, когда им оставалось пробежать полкруга, одна Алёна увеличила скорость на 25%, а другая — на 28%. Оказалось, что первые полкруга они бежали на 5 секунд больше, чем вторые полкруга. У кого лучше результат: у девочек или у мальчиков?

33. (*«Высшая проба», 2016, 7–8.6*) Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек «вверх», «вниз», «влево» и «вправо», причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку «вверх», а если это запрещено (слово начинается с «вниз»), то убирает это первое «вниз»; ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку «вниз», «вправо», «влево». Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.