Number Theory. IMO

Данный листок содержит задачи по теории чисел, которые в разные годы предлагались на Международной математической олимпиаде (IMO). Для каждой задачи приведена последовательность шагов (Steps), ведущая к решению.

1 Делимость

IMO Problems

Problem 1.1. (*1998*) Determine all pairs (a, b) of positive integers such that $ab^2 + b + 7$ divides $a^2b + a + b$.

→ Steps

Problem 1.2. (*1994*) Determine all ordered pairs (m, n) of positive integers such that

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

is an integer.

→ Steps

Problem 1.3. (*2003*) Determine all pairs (a, b) of positive integers such that

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

is a positive integer.

→ Steps

Steps

Problem 1.1. *Determine all pairs (a, b) of positive integers such that $ab^2 + b + 7$ divides $a^2b + a + b$.*

Step 1. Если $ab^2 + b + 7 \mid a^2b + a + b$, то $ab^2 + b + 7 \mid b^2 - 7a$.

Step 2. Случай $b^2 - 7a > 0$ невозможен. Почему?

Step 3. Пусть $b^2 - 7a = 0$. Получите серию пар $(7t^2, 7t)$, $t \in \mathbb{N}$.

Step 4. Пусть $7a - b^2 > 0$. Из условия $ab^2 + b + 7 \mid 7a - b^2$ выведите $b \leqslant 2$.

Step 5. Исследуйте случаи $b = 1$ и $b = 2$. Получатся ещё две пары.

Ответ: $(11, 1)$; $(49, 1)$; $(7t^2, 7t)$, $t \in \mathbb{N}$.

* * *

Problem 1.2. *Determine all ordered pairs* (m, n) *of positive integers such that*

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

is an integer.

Step 1. Заметьте, что $mn-1$ и m взаимно просты. Выведите отсюда, что число $z = \frac{n^3+1}{mn-1}$ является целым тогда и только тогда, когда $\frac{m^3+1}{mn-1}$ — целое (следовательно, имеется симметрия).

Step 2. Рассмотрите случаи $n = 1$ и $m = n$, получив пять пар (m, n). Далее полагаем $m > n \geqslant 2$.

Step 3. Объясните, почему должно быть $z = nt - 1$, $t \in \mathbb{Z}$.

Step 4. Получите оценку $z < n + \frac{1}{n-1} \leqslant 2n - 1$. Найдите отсюда единственное t и ещё четыре пары (m, n).

Ответ: $(1, 2)$; $(2, 1)$; $(1, 3)$; $(3, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 5)$; $(5, 2)$; $(3, 5)$; $(5, 3)$.

* * *

Problem 1.3. *Determine all pairs* (a, b) *of positive integers such that*

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

is a positive integer.

Step 1. Начните со случая $b = 1$ и получите серию $(2t, 1)$, $t \in \mathbb{N}$. Далее $b \geqslant 2$.

Step 2. Из условия положительности числа $z = \frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ выведите $2a \geqslant b$.

Step 3. Рассмотрите случай $b = 2a$ и получите серию $(t, 2t)$. Далее $2a > b$.

Step 4. Из условий $2a > b$ и $z \in \mathbb{N}$ выведите $a > b$. Заметьте, что тогда из $a \leqslant b$ следует $a = b/2$.

Step 5. Рассмотрите квадратное уравнение относительно a с параметрами b и z. Убедитесь, что оно имеет два положительных корня a_1 и a_2 $(a_1 \leqslant a_2)$.

Step 6. Покажите, что $a_1 < b$, откуда $a_1 = b/2$. Получите серию $(8t^4 - t, 2t)$.

Ответ: $(2t, 1)$; $(t, 2t)$; $(8t^4 - t, 2t)$; $t \in \mathbb{N}$.

2 Принцип крайнего

Так называемый *принцип крайнего* заключается в рассмотрении «крайнего» объекта — скажем, наименьшего или наибольшего числа, обладающего заданным свойством. Часто встречающимся примером служит рассмотрение наименьшего простого делителя данного числа.

IMO Problems

Problem 2.1. (*1999*) Determine all pairs (n, p) of positive integers such that

- p is a prime,
- $n \leqslant 2p$,
- $(p-1)^n + 1$ is divisible by n^{p-1}.

→ Steps

Steps

Problem 2.1. *Determine all pairs (n, p) of positive integers such that*

- p *is a prime,*
- $n \leqslant 2p$,
- $(p-1)^n + 1$ *is divisible by* n^{p-1}.

Step 1. Рассмотрите очевидные случаи $n = 1, 2$ и $p = 2$.

Step 2. Пусть $p \geqslant 3$. Тогда $n \geqslant 3$ нечётно.

Step 3. Пусть q — наименьший простой делитель n. Покажите, что $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$.

Step 4. Верно $(p-1)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Почему?

Step 5. Для некоторых целых x и y верно $nx = (q-1)y + 1$. Почему?

Step 6. Из предыдущего шага выведите сравнение $(p-1)^{(q-1)y+1} \equiv -1 \pmod{q}$. Заключите отсюда, что $p = q$.

Step 7. Тогда верно $n = p$. Почему?

Step 8. Имеем: $p^{p-1} \mid (p-1)^p + 1$. Выведите отсюда $p = 3$.

Ответ: $(2, 2)$; $(3, 3)$; $(1, p)$, где p — простое число.

3 Lifting The Exponent Lemma

Для простого числа p и целого числа x обозначение $\|x\|_p$ есть максимальная степень p (с целым неотрицательным показателем), на которую делится x:

$$\|x\|_p = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad p^\alpha \mid x \text{ и } p^{\alpha+1} \nmid x.$$

В этом случае также используется обозначение $p^\alpha \parallel x$.

Очевидно, что $\|x\|_p \geqslant 0$. Случай $x = 0$ здесь интереса не представляет, поэтому далее под знаком $\|\cdot\|_p$ подразумеваются ненулевые целые числа.

1. (*Формула Лежандра*) Докажите, что

$$\|n!\|_p = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

2. Докажите, что

$$\left\|C_n^k\right\|_p > \|n\|_p - \frac{k}{p-1}\,. \tag{1}$$

3. Пусть n нечётно и $3^\alpha \parallel n$. Докажите, что $3^{\alpha+1} \parallel 2^n + 1$. Сделайте это двумя способами:

1) $2 = -1 + 3$, бином Ньютона и оценка (1);

2) индукцией по α, не используя бином Ньютона.

Утверждение задачи 3 является частным случаем так называемой *леммы о лифтинге* (в оригинале — **Lifting The Exponent Lemma**, сокращённо LTE), которая нередко фигурирует в олимпиадных задачах по теории чисел.

Теорема LTE-1. Пусть x и y — различные целые числа, p — нечётное простое число, не являющееся делителем x и y и такое, что $p \mid x - y$. Тогда для любого натурального n выполнено

$$\|x^n - y^n\|_p = \|x - y\|_p + \|n\|_p.$$

Следствие 1. Пусть числа $a \geqslant 2$, α и n — натуральные, $\beta \geqslant 0$ — целое, $p \geqslant 3$ — простое. Если $p^\alpha \parallel a - 1$ и $p^\beta \parallel n$, то $p^{\alpha+\beta} \parallel a^n - 1$.

Примечание. Почему «лифтинг»? В формулировке следствия 1 положим $n = p^\beta$. Тогда получим: $p^\alpha p^\beta \parallel a^{p^\beta} - 1$, т. е. p^β «отправляется наверх» в показатель степени.

Теорема LTE-2. Пусть x и y — различные целые числа, p — нечётное простое число, не являющееся делителем x и y и такое, что $p \mid x + y$. Тогда для любого нечётного натурального n выполнено

$$\|x^n + y^n\|_p = \|x + y\|_p + \|n\|_p.$$

Следствие 2. Пусть числа a, α, $\beta \geqslant 0$ — целое, $p \geqslant 3$ — простое. Если $p^\alpha \parallel a + 1$ и $p^\beta \parallel n$ для нечётного натурального n, то $p^{\alpha+\beta} \parallel a^n + 1$.

4. Докажите теоремы LTE-1 и LTE-2, используя биномиальную оценку (1).

Дополнительно потренироваться в подобных «биномиальных» доказательствах можно на примере следующих двух задач.

5. (*Всеросс., 1996, финал, 9*) Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n ($n > 1$) нечётное, а число p нечётное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

6. (*Всеросс., 1996, финал, 10*) Найдите все такие натуральные n, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном k, $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

$\boxed{n = 2}$

В теоремах LTE-1 и LTE-2 существенную роль играет условие $p \geqslant 3$. Случай $p = 2$ будет рассмотрен отдельно (Problem 3.3).

IMO Problems

Problem 3.1. (*1990*) Determine all integers $n > 1$ such that $\dfrac{2^n + 1}{n^2}$ is an integer.

→ Steps

Problem 3.2. (*1997, Short List*) Let b, m, n be positive integers such that $b > 1$ and $m \neq n$. Prove that if $b^m - 1$ and $b^n - 1$ have the same prime divisors, then $b + 1$ is a power of 2.

→ Steps

Problem 3.3. (*1989, Short List*) Let m be a positive odd integer, $m \geqslant 3$. Find the smallest positive integer n such that 2^{1989} divides $m^n - 1$.

→ Steps

Problem 3.4. (*1991, Short List*) Find the highest degree k of 1991 for which 1991^k divides the number

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

→ Steps

Problem 3.5. (*2014, Short List*) Find all triples (p, x, y) consisting of a prime number p and two positive integers x and y such that $x^{p-1} + y$ and $x + y^{p-1}$ are both powers of p.

→ Steps

Steps

Problem 3.1. *Determine all integers $n > 1$ such that $\dfrac{2^n + 1}{n^2}$ is an integer.*

Первое решение

Step 1. Через (a, b) обозначаем наибольший общий делитель целых чисел a и b. Пусть $a > b$. Докажите, что $(a, b) = (a - b, b)$. Объясните, как работает алгоритм Евклида нахождения НОД.

Step 2. Пусть $a > 1$, m, n — натуральные числа. Докажите, что $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

Step 3. Докажите малую теорему Ферма: если a не делится на простое число p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Рассмотрите остатки от деления на p чисел $a, 2a, \ldots, (p-1)a$

Step 4. Пусть n нечётно и p — наименьший простой делитель n. Найдите $(2n, p-1)$.

Step 5. Пусть 2^n+1 делится на n. Комбинируя результаты шагов 2–4, докажите, что наименьший простой делитель n равен 3.

Step 6. Пусть $2^n + 1$ делится на n^2. С помощью LTE докажите, что $3 \parallel n$.

Step 7. Пусть $2^n + 1$ делится на m, причём $m > 1$ и $3 \nmid m$. Докажите, что наименьший простой делитель числа m равен 7.

Step 8. Какие остатки может давать степень двойки при делении на 7?

Ответ: $n = 3$.

Второе решение

Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ натурального числа n есть количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Step 1. Для простого числа p найдите: а) $\varphi(p)$; б) $\varphi(p^k)$, где $k \in \mathbb{N}$.

а) $p-1$; б) $p^k - p^{k-1}$

Step 2. Докажите теорему Эйлера: если a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Определение. Пусть a и m взаимно просты. *Порядком* числа a по модулю m называется наименьшее натуральное r, для которого $a^r \equiv 1 \pmod{m}$.

Step 3. Покажите, что если $a^s \equiv 1 \pmod{m}$, то $r \mid s$. В частности, $r \mid \varphi(m)$.

Step 4. Предположим, что $2^n + 1$ делится на n. Пусть p — наименьший простой делитель n. Обозначим r порядок 2 по модулю p. Покажите, что $r \mid 2n$. Выведите отсюда, что $r = 2$ и $p = 3$.

Определение. Число a, взаимно простое с m, называется *первообразным корнем* по модулю m, если порядок a по модулю m равен $\varphi(m)$.

Step 5. Докажите, что 2 — первообразный корень по модулю 3^n для любого $n \in \mathbb{N}$.

Step 6. Пользуясь предыдущим утверждением, докажите, что если $2^n \equiv -1 \pmod{3^{k+1}}$, то $3^k \mid n$. Выведите отсюда, что если $2^n + 1$ делится на n^2 и $3^k \parallel n$, то $k \leqslant 1$.

Step 7. Предположим, что n имеет простой делитель, больший 3. Пусть q — наименьший такой делитель, и пусть r — порядок 2 по модулю q. Снова убедитесь, что $r \mid 2n$. Предположив, что r

нечётно, придите к противоречию.

Step 8. Пусть r чётно. Покажите, что тогда $r = 2$ или $r = 6$. Выведите отсюда, что $q = 7$. А чему равен порядок 2 по модулю 7?

* * *

Problem 3.2. *Let b, m, n be positive integers such that $b > 1$ and $m \neq n$. Prove that if $b^m - 1$ and $b^n - 1$ have the same prime divisors, then $b + 1$ is a power of 2.*

Step 1. Для натуральных чисел x и y обозначаем $x \sim y$, если x и y имеют одинаковые простые делители. Убедитесь, что:

а) это отношение эквивалентности;

б) если $x \sim y$, то $x \sim (x, y)$.

Step 2. Пусть $d = (m, n)$. Положим $k = m/d$ и $a = b^d$. Покажите, что отношение $b^m - 1 \sim b^n - 1$ равносильно отношению $a^k - 1 \sim a - 1$.

Step 3. В предположении, что $a+1$ есть степень двойки, покажите, что $b+1$ есть также степень двойки.

Step 4. Пусть $a^k - 1 \sim a - 1$ и $r \mid k$. Покажите, что $a^r - 1 \sim a - 1$.

Step 5. Пусть $p \geqslant 3$ — простой делитель числа k и $p^\beta \parallel k$. Обозначим $S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{p^{\beta}-1}$. Покажите, что каждый простой делитель числа S делит $a-1$. Выведите отсюда, что S является степенью p.

Step 6. Коль скоро $p \mid a - 1$, положим $p^\alpha \parallel a - 1$. С помощью леммы о лифтинге покажите, что $S = p^\beta$. Это противоречие. Почему?

Step 7. Противоречие порождено предположением, что $p \geqslant 3$ — простой делитель числа k. Следовательно, k есть степень двойки. Выведите отсюда, что $a + 1$ также является степенью двойки.

* * *

Problem 3.3. *Let m be a positive odd integer, $m \geqslant 3$. Find the smallest positive integer n such that 2^{1989} divides $m^n - 1$.*

Step 1. Проанализируйте доказательство теоремы LTE-1. Где используется требование $p \geqslant 3$ и почему не проходит доказательство для $p = 2$?

Ситуацию можно поправить, усилив условие теоремы.

Теорема LTE-3. Пусть x и y — различные нечётные числа и $4 \mid x - y$. Тогда для любого натурального n выполнено

$$\|x^n - y^n\|_2 = \|x - y\|_2 + \|n\|_2.$$

Следствие 3. Если $2^\alpha \parallel m-1$ при $\alpha \geqslant 2$ и $2^\beta \parallel n$, то $2^{\alpha+\beta} \parallel m^n - 1$.

Step 2. Следствие 3 ничего не говорит нам о случае $m \equiv -1 \pmod 4$. Но на самом деле имеется более сильное утверждение: если $2^{\alpha+1} \parallel m^2-1$ и $2^\beta \parallel n$, то $2^{\alpha+\beta} \parallel m^n-1$. Его мы и будем доказывать.

Step 3. Пусть $n = 2^\beta k$, где k нечётно. Покажите, что m^n-1 и $m^{2^\beta}-1$ делятся на одну и ту же степень двойки.

Step 4. Раскладывая $m^{2^\beta}-1$ на множители (несколько раз применяя формулу разности квадратов), покажите, что $2^{\alpha+\beta} \parallel m^{2^\beta}-1$ и тем самым $2^{\alpha+\beta} \parallel m^n-1$.

Ответ: если $\alpha < 1988$, то $n = 2^{1988-\alpha}$; иначе $n=1$.

* * *

Problem 3.4. *Find the highest degree k of 1991 for which 1991^k divides the number*

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

Step 1. Пусть $a \geqslant 3$ нечётно и n — целое. Докажите, что $a^{n+1} \parallel (a+1)^{a^n}-1$ и $a^{n+1} \parallel (a-1)^{a^n}+1$.

Ответ: $k = 1993$.

* * *

Problem 3.5. *Find all triples (p,x,y) consisting of a prime number p and two positive integers x and y such that $x^{p-1}+y$ and $x+y^{p-1}$ are both powers of p.*

Step 1. Случай $p=2$ тривиален. Каков будет ответ? Далее полагаем $p \geqslant 3$.

Step 2. Покажите, что $x=y$ невозможно. Покажите также, что $p \mid x$ невозможно.

Step 3. Полагаем $x<y$ и $p \nmid x$. Пусть $x^{p-1}+y = p^a$ и $x+y^{p-1} = p^b$. Покажите, что $p^a \mid y^p - x^p$ и $p^{a-1} \mid y-x$. Пусть $y = x + p^{a-1}q$.

Step 4. Рассмотрев произведение $x(x^{p-2}+1)$, докажите, что $x \mid p-q$.

Step 5. Из $p^b = x + (p^a - x^{p-1})^{p-1}$ выведите, что $p^a \mid 1 + x^{p(p-2)}$. С помощью малой теоремы Ферма покажите теперь, что $x \equiv -1 \pmod p$.

Step 6. Из условий $x \mid p-q$ и $p \mid x+1$ выведите, что $q=1$ и $x=p-1$ (и тогда $y = p-1+p^{a-1}$).

Step 7. Покажите, что $a=2$ и $p=3$.

Ответ: $(3,2,5)$; $(3,5,2)$; $(2,n,2^k-n)$ при $0<n<2^k$.

4 Китайская теорема об остатках

IMO Problems

Problem 4.1. (*2000, Short List*) Determine all positive integers $n \geqslant 2$ that satisfy the following condition: for all integers a, b relatively prime to n,

$$a \equiv b \pmod n \quad \text{if and only if} \quad ab \equiv 1 \pmod n.$$

→ Steps

Problem 4.2. (*1992, Short List*) Does there exist a set M with the following properties?

(i) The set M consists of 1992 natural numbers.

(ii) Every element in M and the sum of any number of elements have the form m^k ($m, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$).

→ Steps

Steps

Problem 4.1. *Determine all positive integers $n \geqslant 2$ that satisfy the following condition: for all integers a, b relatively prime to n,*

$$a \equiv b \pmod n \quad \textit{if and only if} \quad ab \equiv 1 \pmod n.$$

Step 1. Объясните, почему условие (condition) эквивалентно условию $a^2 \equiv 1 \pmod n$ для всех целых a, взаимно простых с n.

Step 2. Это, в свою очередь, эквивалентно системе (для любого a, взаимно простого с n)

$$a^2 \equiv 1 \pmod{p_1^{e_1}}, \quad a^2 \equiv 1 \pmod{p_2^{e_2}}, \quad \ldots, \quad a^2 \equiv 1 \pmod{p_s^{e_s}},$$

где $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_s^{e_s}$ — разложение n на простые множители.

Step 3. Если $p_i \geqslant 3$, то берём $a = 2$ и с необходимостью заключаем, что $p_i = 3$ и $e_i = 1$.

Step 4. Если $p_i = 2$, то берём $a = 3$ и с необходимостью заключаем, что $e_i \leqslant 3$.

Step 5. Убеждаемся, что все делители 24 годятся.

Ответ: все делители числа 24.

* * *

Problem 4.2. *Does there exist a set M with the following properties?*

(i) The set M consists of 1992 natural numbers.

(ii) Every element in M and the sum of any number of elements have the form m^k ($m, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$).

Step 1. Для любого натурального n пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Рассмотрим число $a = 2^{p_1 e_2} 3^{p_1 e_3} \ldots n^{p_1 e_n}$ с некоторыми целыми неотрицательными e_2, e_3, $\ldots$, e_n (оно имеет вид m^{p_1}).

Step 2. Подберём e_2 как решение системы сравнений

$$p_1 e_2 \equiv -1 \pmod{p_2}, \quad p_1 e_2 \equiv 0 \pmod{p_3}, \quad \ldots, \quad p_1 e_2 \equiv 0 \pmod{p_n}$$

(почему это возможно?).

Step 3. Подберём e_3, $\ldots$, e_n как решения систем

$$\begin{aligned}
&p_1 e_3 \equiv 0 \pmod{p_2}, \quad p_1 e_3 \equiv -1 \pmod{p_3}, \quad \ldots, \quad p_1 e_3 \equiv 0 \pmod{p_n};\\
&\ldots\\
&p_1 e_n \equiv 0 \pmod{p_2}, \quad p_1 e_n \equiv 0 \pmod{p_3}, \quad \ldots, \quad p_1 e_n \equiv -1 \pmod{p_n}.
\end{aligned}$$

Step 4. Тогда оказывается, что $2a$ есть p_2-я степень целого числа, $3a$ — p_3-я степень, $\ldots$, na — p_n-я степень.

Step 5. Возьмите $M = \{a, 2a, \ldots, 1992a\}$ и $n = 1992 \cdot 1993/2$.

Ответ: существует.

5 Уравнения в целых числах

IMO Problems

Problem 5.1. (*2006*) Determine all pairs (x, y) of integers such that

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

→ Steps

Problem 5.2. (*1997*) Find all pairs (a, b) of integers $a, b \geqslant 1$ that satisfy the equation

$$a^{b^2} = b^a.$$

→ Steps

Steps

Problem 5.1. *Determine all pairs (x, y) of integers such that*

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Step 1. Покажите, что $x < 0$ невозможно.

Step 2. Непосредственно проверьте $x = 0, 1, 2$ (две пары решений). Далее $x \geqslant 3$ и $y > 0$.

Step 3. Запишите уравнение в виде $(y - 1)(y + 1) = 2^x(1 + 2^{x+1})$.

Step 4. Одно из чисел $y \pm 1$ делится на 2, но не на 4, а второе — на 2^{x-1}, но не на 2^x.

Step 5. Пусть $y - 1 = 2^{x-1}m$, где m нечётно. Получите соотношение $2^{x-2}(m^2 - 8) = 1 - m$. Есть решения?

Step 6. Аналогично, пусть $y + 1 = 2^{x-1}m$. Получите ещё две пары решений.

Ответ: $(0, \pm 2)$; $(4, \pm 23)$.

* * *

Problem 5.2. *Find all pairs (a, b) of integers $a, b \geqslant 1$ that satisfy the equation*

$$a^{b^2} = b^a.$$

Step 1. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ и $b = p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}$ с простыми $p_1, \ldots, p_s$. Покажите, что $\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{a}{b^2} = \frac{m}{n}$ для некоторых взаимно простых m и n. Выведите отсюда, что a и b являются степенями одного целого числа: $a = c^m$, $b = c^n$.

Step 2. Получите решение для $c = 1$. Далее $c \geqslant 2$.

Step 3. Выведите уравнение $mc^{2n} = nc^m$.

Step 4. Пусть $m > n$, откуда $m > 2n$. Обозначаем $d = m - 2n$. Выведите $d = n(c^d - 2)$.

Step 5. Докажите, что $c^d - 2 > d$ при $d \geqslant 3$.

Step 6. Следовательно, $d \leqslant 2$. Получите два решения.

Step 7. Пусть теперь $m < n$. Действуя аналогично, покажите, что решений нет.

Ответ: $(1, 1)$; $(16, 2)$; $(27, 3)$.