Необходимые и достаточные условия

Необходимые и достаточные условия фигурируют в математических рассуждениях очень часто, и данную терминологию вам нужно усвоить раз и навсегда уже сейчас. Для этого имеются как минимум три причины.

Во-первых, с необходимыми и достаточными условиями вы постоянно встречаетесь в геометрии (но, возможно, не знаете, что они так называются). А именно, необходимое условие есть *свойство*, а достаточное условие есть *признак*. Свойство параллелограмма, признак параллелограмма... вспоминаете?

Во-вторых, с понятиями необходимости и достаточности приходится часто оперировать в сложных задачах с параметрами. Кстати, из всей школьной математики данная тема — задачи с параметрами — по уровню и логической насыщенности рассуждений максимально приближена к высшей математике. Поэтому если сейчас, в школе, вы успеете выработать привычку к математическим рассуждениям, то вузовский курс математики пойдёт у вас гораздо легче.

Это как раз и есть третья причина — подготовленность к восприятию курса высшей математики (в первую очередь — математического анализа). Необходимые и достаточные условия там присутствуют на каждом шагу. На лекции по матанализу вы то и дело будете слышать нечто вроде: «Необходимость доказана, теперь докажем достаточность». И если вы не знаете этих терминов, то нить рассуждений лектора потеряете очень быстро. Надо ли объяснять, какой клубок проблем вы в результате получите к первой же сессии?

Поэтому давайте разбираться с необходимыми и достаточными условиями и повышать тем самым свою математическую культуру.

Пусть у нас имеются два высказывания, которые мы обозначим A и B. Например:

$$A := \textit{четырёхугольник является квадратом.}$$
$$B := \textit{четырёхугольник является ромбом.}$$

Из двух высказываний A и B мы можем образовать новое высказывание, которое читается так: «если A, то B». Оно называется *импликацией* и обозначается $A \Rightarrow B$. В нашем примере импликация выглядит следующим образом:

$$A \Rightarrow B := \textit{если четырёхугольник является квадратом, то он является ромбом.} \tag{1}$$

Это утверждение верно (логик скажет — истинно). Действительно, квадрат есть частный случай ромба.

Мы можем образовать и обратную импликацию:

$$B \Rightarrow A := \textit{если четырёхугольник является ромбом, то он является квадратом.}$$

Это утверждение неверно (логик скажет — ложно). Конечно же, произвольный ромб вовсе не обязан являться квадратом.

Определение. Пусть импликация $A \Rightarrow B$ верна. Тогда B называется *необходимым* условием для A; в то же время A называется *достаточным* условием для B.

Давайте взглянем ещё раз на верную импликацию (1). В соответствии с определением мы видим, что «быть ромбом» — это необходимое условие для «быть квадратом»; для того, чтобы четырёхугольник являлся квадратом, *необходимо*, чтобы он являлся ромбом. Попросту говоря, если четырёхугольник — квадрат, то условие «быть ромбом» *не обойти*: будучи квадратом, четырёхугольник обязан быть ромбом. (Куда он денется, наш квадрат? — не быть ромбом он не может.)

В то же время «быть квадратом» — это достаточное условие для «быть ромбом»; для того, чтобы четырёхугольник являлся ромбом, *достаточно*, чтобы он являлся квадратом. Если четырёхугольник — квадрат, то он и подавно ромб.

В привычной вам терминологии школьной геометрии необходимое условие называется свойством, а достаточное условие — признаком. Так, «быть ромбом» — это свойство квадрата (квадрат, помимо всего прочего, является ромбом). Наоборот, «быть квадратом» — это признак ромба (если четырёхугольник — квадрат, то он — ромб; тут акцент на том, что мы опознаём ромб).

В математическом тексте для выражения необходимого условия используются также обороты: *только тогда*; *только если*; *только в том случае, если*. Например:

Четырёхугольник является квадратом *только тогда*, когда он является ромбом.

Четырёхугольник является квадратом, *только если* он является ромбом.

Четырёхугольник является квадратом *только в том случае, если* он является ромбом.

Для выражения достаточного условия используются обороты: *тогда*; *если*; *в том случае, если*. В нашем примере:

Четырёхугольник является ромбом *тогда*, когда он является квадратом.

Четырёхугольник является ромбом, *если* он является квадратом.

Четырёхугольник является ромбом *в том случае, если* он является квадратом.

«Быть ромбом» является необходимым, но не достаточным условием для «быть квадратом» (это свойство, но не признак квадрата). Квадрат с необходимостью является ромбом, но обратное неверно: не всякий ромб — квадрат.

«Быть квадратом» является достаточным, но не необходимым условием для «быть ромбом» (это признак, но не свойство ромба). Квадрат — заведомо ромб; однако из того, что четырёхугольник — ромб, не следует с необходимостью, что он — квадрат (нужно ещё, чтобы углы были прямые).

Некоторые математические утверждения имеют вид необходимых и достаточных условий одновременно. Наш пример с квадратом и ромбом тут не годится, поэтому «сменим пластинку».

Возьмём теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Сформулируем её немного по-другому.

Теорема Пифагора. Если треугольник является прямоугольным, то сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

Обратите внимание: мы придали теореме форму импликации $A \Rightarrow B$, где

$A :=$ *треугольник является прямоугольным*,

$B :=$ *сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны*.

Теперь мы уже владеем терминологией и можем сформулировать теорему Пифагора так: для того, чтобы треугольник являлся прямоугольным, *необходимо*, чтобы сумма квадратов двух его сторон равнялась квадрату третьей стороны.

Здесь замечательно то, что обратная импликация $B \Rightarrow A$ также верна!

Обратная теорема Пифагора. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник является прямоугольным.

Иными словами, обратную теорему Пифагора можно сформулировать так: для того, чтобы треугольник был прямоугольным, *достаточно*, чтобы сумма квадратов двух его сторон равнялась квадрату третьей стороны.

Когда истинны обе импликации $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, мы называем высказывания A и B *равносильными* или *эквивалентными*. В таком случае верно утверждение $A \Leftrightarrow B$, то есть оба высказывания A и B следуют друг из друга.

Эквивалентность высказываний описывается выражениями: *необходимо и достаточно*; *тогда и только тогда*; *если и только если*; *в том и только в том случае, если*[1]. Например, прямую и обратную теорему Пифагора можно объединить в одно утверждение следующими способами:

— Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, *необходимо и достаточно*, чтобы сумма квадратов двух его сторон равнялась квадрату третьей стороны.

— Треугольник является прямоугольным *тогда и только тогда, когда* сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

— Треугольник является прямоугольным, *если и только если* сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

— Треугольник является прямоугольным *в том и только в том случае, если* сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

Математик скажет также, что условие «сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны» *характеризует* (или *описывает*) прямоугольный треугольник. Именно, любой прямоугольный треугольник этому условию удовлетворяет и никакой непрямоугольный треугольник этому условию не удовлетворяет.

Необходимое и достаточное условие называется также *критерием*. Таким образом, критерий фактически состоит из двух утверждений, одно из которых является необходимым условием, а другое — достаточным[2].

[1]В английском языке (и без того лаконичном) соответствующее выражение *if and only if* сокращается до забавного *iff*. Именно так и называется данный файл ;-)

[2]В школьной математике пользоваться термином «критерий» не принято, но уже на первом курсе вы с ним столкнётесь. Первое, что вас поджидает — критерий Коши сходимости последовательности. Не забудьте на коллоквиуме/зачёте/экзамене, что доказательство критерия состоит из доказательства двух утверждений — необходимости и достаточности!