Формула включений и исключений

Содержание

Не всякая задача комбинаторики решается непосредственным применением основных комбинаторных принципов — правила суммы или произведения, подсчётом числа размещений или сочетаний. В некоторых случаях приходится идти окольным путем и действовать своеобразным «методом решета», который состоит в следующем: для нахождения числа элементов интересующего нас множества мы сначала находим число элементов некоторого большего множества, а потом «просеиваем» нужные элементы, постепенно отбрасывая лишние.

1 Переход к дополнению

Простейшим примером «метода решета» является переход к дополнению: число «хороших» элементов равно общему числу элементов минус число «плохих» элементов.

Задача. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 7?

Решение. Найдём сначала, сколько всего имеется четырёхзначных чисел. Первую цифру мы можем выбрать девятью способами, каждую из остальных цифр — десятью. Стало быть, количество четырёхзначных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Теперь найдём, сколько четырёхзначных чисел не содержат ни одной семёрки. Для выбора первой цифры имеется 8 способов, для выбора каждой из остальных цифр — 9 способов. Следовательно, всего будет $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ четырёхзначных чисел, в записи которых нет ни одной цифры 7.

Ну а чисел, в которых хотя бы одна семёрка имеется, будет $9000 - 5832 = 3168$.

Здесь мы действовали по схеме, которую, выражаясь неформально, можно описать так: *«хотя бы один» равно общему числу минус «ни одного»*. В других ситуациях можно действовать наоборот: *«ни одного» равно общему числу минус «хотя бы один»*.

Задача. Дан выпуклый n-угольник ($n \geqslant 5$). Сколькими способами можно выбрать в нём две непересекающиеся диагонали? Порядок выбора не важен.

Решение. Идея подсчёта такова: искомое число пар непересекающихся диагоналей равно общему числу пар диагоналей минус число пар пересекающихся (внутри n-угольника) диагоналей минус число пар смежных (выходящих из одной вершины) диагоналей.

Из каждой вершины n-угольника исходят $n - 3$ диагоналей, поэтому всего диагоналей имеется $n(n-3)/2$. Значит, число неупорядоченных пар диагоналей равно:

$$N_0 = C^2_{n(n-3)/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-3)}{2} \left(\frac{n(n-3)}{2} - 1 \right) = \frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}\,.$$

Теперь найдём число пар пересекающихся диагоналей. Каждой такой паре отвечает четвёрка вершин n-угольника — концов этих диагоналей. Наоборот, каждым четырём вершинам n-угольника соответствует единственная пара пересекающихся диагоналей. Поэтому число пар пересекающихся диагоналей есть число неупорядоченных четвёрок вершин n-угольника:

$$N_1 = C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\,.$$

Осталось найти число N_2 пар смежных диагоналей. Из каждой вершины выходят C_{n-3}^2 пар диагоналей, поэтому

$$N_2 = nC_{n-3}^2 = \frac{n(n-3)(n-4)}{2}\,.$$

Искомое число пар непересекающихся диагоналей: $N = N_0 - N_1 - N_2$, и после несложных преобразований получим:

$$N = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}\,.$$

Бывает так, что в условии задачи ничто не намекает на *«хотя бы один»* или *«ни одного»*, и тем не менее задача проще всего решается переходом к дополнению.

Задача. (*«Высшая проба», 2013, 10*) В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

Решение. Найдём сначала общее количество соединений пяти городов четырьмя авиалиниями. Всего пар городов имеется $C_5^2 = 10$. Из них нужно выбрать четыре пары для соединения. Это можно сделать $C_{10}^4 = 210$ способами.

Теперь ищем количество *плохих* соединений (когда найдутся два города таких, что из одного никак нельзя долететь до другого). Плохие соединения могут быть двух видов: 1) есть изолированный город (из которого не выходит ни одна авиалиния); 2) нет изолированного города (то есть из каждого города выходит авиалиния).

Пусть изолированный город есть (его можно выбрать 5 способами). Тогда четыре авиалинии проложены (как угодно) между четырьмя остальными городами. Из $C_4^2 = 6$ пар городов мы выбираем 4 пары для соединения; это можно сделать $C_6^4 = 15$ способами. Следовательно, плохих соединений с изолированным городом получается $5 \cdot 15 = 75$.

Теперь предположим, что в плохом соединении изолированного города нет. Выясним, как устроено такое соединение. Допустим, что из города А нельзя попасть в город Д. Пусть А соединён линией с Б, а Д соединён линией с Г. Имеются лишь две возможности провести оставшиеся линии: достроить треугольник АБВ (он не будет связан с отрезком ГД) или достроить треугольник ВГД (он не будет связан с отрезком АБ).

Итак, плохое соединение без изолированного города — это треугольник плюс не связанный с ним отрезок, и таких соединений столько же, сколько существует способов соединить два города отрезком (тогда оставшиеся три города автоматически замкнутся треугольником). Таким образом, нужно просто выбрать два города из пяти; для этого имеется $C_5^2 = 10$ способов.

Всего плохих соединений получается $75+10 = 85$. Следовательно, искомое число соединений равно $210 - 85 = 125$.

2 Формула включений и исключений

Действуя по схеме *«ни одного» равно общему числу минус «хотя бы один»*, мы должны уметь вычислять *«хотя бы один»*, то есть находить число объектов, обладающих хотя бы одним из указанных свойств. С теоретико-множественной точки зрения речь идёт о нахождении числа элементов в объединении нескольких множеств. В такой ситуации часто приходит на помощь формула включений и исключений.

В качестве элементарного примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Каждый ученик класса побывал в театре или в кино. В театр сходили 22 человека. В кино были 15 человек. И в театре, и в кино были 7 человек. Сколько учеников в классе?

Решение. Если мы найдём сумму $22 + 15$, то окажется, что каждого, кто побывал и в театре, и в кино, мы посчитали дважды (например, если Вася сходил и в театр, и в кино, то один раз он вошёл в эту сумму в числе 22 «театралов», а второй раз — в числе 15 «киношников»). Поэтому найденная сумма на 7 больше количества учеников в классе. Следовательно, в классе $22 + 15 - 7 = 30$ человек.

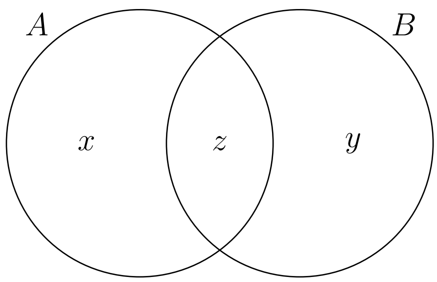
Число элементов конечного множества A называется *мощностью* этого множества и обозначается $|A|$. Формула включений и исключений даёт возможность находить мощность объединения любого конечного набора множеств.

Формула включений и исключений для двух множеств. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (1)$$

Доказательство формулы (1) почти дословно повторяет решение последней задачи: суммируя мощности множеств A и B, мы дважды учитываем каждый элемент в их пересечении (один раз — со стороны множества A, второй раз — со стороны множества B). Поэтому мощность пересечения надо вычесть.

Можно также доказать формулу (1) с помощью следующего наглядного рисунка.



Пусть x — число элементов множества A, не входящих в B; y — число элементов B, не входящих в A; z — число элементов в пересечении A и B. Тогда $x + z = |A|$, $y + z = |B|$, и мы имеем:

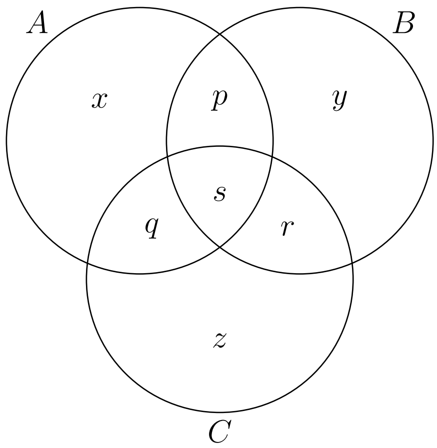
$$|A \cup B| = x + y + z = (x + z) + (y + z) - z = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Формула включений и исключений для трёх множеств. Для любых конечных множеств A, B и C справедливо равенство

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \qquad (2)$$

Почему так получается? Назовём *двукратными* элементы, входящие в пересечение ровно двух множеств, и *трёхкратными* — элементы, входящие в пересечение трёх множеств. Сложив мощности A, B и C, мы дважды учли каждый двукратный элемент и трижды — каждый трёхкратный. Вычтя три попарных пересечения, мы «восстановили справедливость» в отношении двукратных элементов, но теперь оказались полностью неучтёнными трёхкратные элементы. Поэтому надо добавить мощность тройного пересечения.

Приведём также доказательство формулы (2) с помощью следующего рисунка.



Здесь x, y, z —количества однократных элементов (входящих лишь в одно из данных множеств); p, q, r —количества двукратных элементов; s — число трёхкратных элементов. Имеем:

$$|A\cup B\cup C| = x+y+z+p+q+r+s = \\ = (x+p+q+s)+(y+p+r+s)+(z+q+r+s)-(p+s)-(q+s)-(r+s)+s = \\ = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Задача. В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков?

Решение. Пусть A —множество туристов группы, знающих английский, F — французский, I — испанский. Тогда $|A| = 20$, $|F| = 15$, $|I| = 11$, $|A\cap F| = 7$, $|A\cap I| = 5$, $|F\cap I| = 3$, $|A\cap F\cap I| = 2$. Сколько человек говорят *хотя бы на одном* из этих языков? По формуле включений и исключений для трёх множеств имеем:

$$|A\cup F\cup I| = |A|+|F|+|I|-|A\cap F|-|A\cap I|-|F\cap I|+|A\cap F\cap I| = \\ = 20+15+11-7-5-3+2 = 33.$$

Значит, ни одного из данных языков не знают $40-33=7$ человек.

Теперь мы готовы привести формулу включений и исключений для любого конечного числа множеств, которая обобщает формулы (1) и (2).

Формула включений и исключений. Для любых конечных множеств A_1, A_2, …, A_n справедливо равенство

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \\ - \sum_{i<j<k<l}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| + \ldots + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|. \quad (3)$$

Выглядит формула (3) громоздко, но суть её проста: сначала суммируем мощности всех множеств (n слагаемых), затем вычитаем мощности всех попарных пересечений (C_n^2 слагаемых), затем прибавляем мощности всех тройных пересечений (C_n^3 слагаемых) и так далее, чередуя знаки, до последнего слагаемого — мощности пересечения всех n множеств.

Для доказательства формулы (3) нам понадобится вспомогательное тождество.

Лемма. Для любого натурального m справедливо равенство

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{m+1} C_m^m = 1.$$

Доказательство леммы. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$0 = (1-1)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot 1^{m-k} \cdot (-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k = 1 - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k,$$

откуда

$$1 = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_m^k = C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{m+1} C_m^m.$$

Лемма доказана.

Доказательство формулы включений и исключений. Возьмём произвольный элемент $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Покажем, что x учитывается правой частью формулы (3) в точности один раз.

Предположим, что x принадлежит пересечению ровно m наших множеств; не ограничивая общности, можно считать, что x принадлежит множествам $A_1, \ldots, A_m$ и не принадлежит множествам $A_{m+1}, \ldots, A_n$. Тогда:

- в первой сумме $\sum_i |A_i|$ элемент x посчитан $m = C_m^1$ раз (в слагаемых $|A_1|, \ldots, |A_m|$);
- во второй сумме $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$ элемент x посчитан C_m^2 раз (ведь количество попарных пересечений $A_i \cap A_j$, для которых $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, равно C_m^2);
- в третьей сумме $\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ элемент x посчитан C_m^3 раз (ведь количество пересечений $A_i \cap A_j \cap A_k$, для которых $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, равно C_m^3);

  $\ldots$
- в m-й сумме $\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}|$ элемент x посчитан $1 = C_m^m$ раз (он войдёт только в слагаемое $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$);
- суммы, содержащие $m+1$ и более пересечений, не учитывают элемент x, поскольку x не входит в пересечение более чем m множеств.

Таким образом, элемент x оказывается посчитанным $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{m+1} C_m^m$ раз. Согласно лемме это выражение равно единице, что и требовалось. Формула (3) тем самым доказана.

Перейдём к рассмотрению задач, которые можно решить с помощью формулы включений и исключений.

3 Задача о беспорядках

В листке «Перебор вариантов» мы привели частный случай задачи о шляпах (для четырёх гостей) и решили её непосредственным перебором. Теперь рассмотрим данную задачу в общем виде.

Задача. (*Леонард Эйлер*) Войдя в ресторан, n гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

Решение. Занумеруем гостей числами 1, 2, ..., n и так же занумеруем шляпы (при этом i-я шляпа принадлежит i-му гостю). Тогда любая перестановка $k_1k_2\ldots k_n$ чисел 1, 2, ..., n обозначает вариант разбора шляп, при котором i-й гость получил k_i-ю шляпу. Например, в случае четырёх человек перестановка 4132 означает, что первый получил четвёртую шляпу ($k_1 = 4$), второй — первую ($k_2 = 1$), третий — третью (свою, $k_3 = 3$) и четвёртый — вторую ($k_4 = 2$). Наоборот, каждый вариант разбора шляп обозначается единственной перестановкой чисел 1, 2, ..., n.

Будем говорить, что в перестановке $k_1k_2\ldots k_n$ чисел 1, 2, ..., n число i стоит на своём месте, если $k_i = i$ (например, в перестановке 4132 тройка стоит на своём месте). Нас интересует количество *беспорядков*, то есть таких перестановок, в которых ни одно из чисел не стоит на своём месте. Число беспорядков можно найти, вычитая из общего количества перестановок, равного $n!$, количество тех перестановок, в которых хотя бы одно из чисел стоит на своём месте.

Пусть A_i — множество перестановок, в которых число i стоит на своём месте ($i = 1, 2, \ldots, n$). Искомое число N беспорядков, таким образом, равно

$$\begin{aligned}N &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \\ &= n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Ясно, что $|A_i| = (n-1)!$, поэтому

$$\sum_i |A_i| = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Точно так же $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ и

$$\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}\,.$$

Аналогично $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ и

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}\,.$$

Теперь мы приходим к нужной формуле:

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

При $n = 4$ найденная формула даёт:

$$N = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 12 - 4 + 1 = 9.$$

Этот результат мы получили ранее прямым перебором.

Заметим, что если шляпы разбираются случайным образом, то вероятность беспорядка оказывается равной:

$$\frac{N}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

При $n \to \infty$ данная сумма стремится к пределу, равному $1/e$, где $e = 2{,}718\ldots$ — одна из самых распространённых математических констант (наряду с числом π), получившая обозначение также в честь Эйлера. Таким образом, если гостей много, то вероятность, что каждый уйдёт в чужой шляпе, приблизительно равна $1/e \approx 0{,}37$.

4 Функция Эйлера

Напомним, что два натуральных числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей (кроме 1).

Функция Эйлера — это функция $\varphi(n)$ натурального аргумента n, равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n (при этом $\varphi(1) = 1$ по определению). Например, $\varphi(15) = 8$, поскольку имеется 8 натуральных чисел, меньших 15 и взаимно простых с ним: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Функция Эйлера играет важную роль в теории чисел и криптографии.

Пусть $n \geqslant 2$. Значение функции Эйлера числа n можно найти из разложения этого числа на простые множители:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

(p_1, p_2, ..., p_r — все различные простые делители числа n). Покажем, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Если число k взаимно просто с n, то k не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, ..., p_r. Мы найдём величину $\varphi(n)$, вычитая из n количество чисел, меньших n и делящихся хотя бы на одно из чисел p_1, p_2, ..., p_r.

Пусть A_i — множество чисел, меньших n и делящихся на p_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Имеем:

$$N = n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = \\ = n - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^r |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|.$$

Ясно, что

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k},$$

и так далее. Получаем:

$$\varphi(n) = n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i<j<k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r} = \\ = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

что и требовалось.

5 Числа Стирлинга второго рода

В качестве ещё одного примера применения формулы включений и исключений рассмотрим следующую комбинаторную задачу (далее предполагается, что $m \geqslant n$).

Задача. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым?

Решение. Если ящики могут быть пустыми, то число способов разложить m различных шаров по n различным ящикам равно n^m — это просто число размещений с повторениями.

Пусть A_i — множество разложений шаров, при которых i-й ящик пуст ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда искомое число $D(m, n)$ разложений шаров, при которых все ящики непусты, равно:

$$D(m, n) = n^m - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\ = n^m - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Ясно, что

$$|A_i| = (n-1)^m\,, \quad |A_i \cap A_j| = (n-2)^m\,, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)^m$$

и так далее. Получаем:

$$D(m,n) = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - C_n^3(n-3)^m + \ldots + (-1)^n \cdot 0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Задача решена.

Данная задача известна также и в другой формулировке. Прежде всего, дадим определение: функция $f\colon A \to B$ называется *сюръекцией*, если **каждый** элемент множества B имеет прообраз (то есть **для любого** $y \in B$ найдётся такой элемент $x \in A$, что $f(x) = y$). Например, функция $f\colon \mathbb{R} \to [-1;1]$, задаваемая формулой $f(x) = \sin x$, является сюръекцией, а функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемая той же формулой $f(x) = \sin x$, сюръекцией уже не будет, так как число 2 не имеет прообраза.

Задача. Найти число сюръекций из m-элементного множества в n-элементное.

Решение. Рассмотрим функцию $f\colon A \to B$, где $|A| = m$ и $|B| = n$. Представим себе, что элементы множества A — это шары, а элементы множества B — это ящики. Тогда функция f есть некоторый способ разложить m различных шаров в n различных ящиков; при этом f будет сюръекцией в том и только в том случае, если при соответствующем разложении ни один ящик не окажется пустым. Следовательно, число сюръекций из A в B равно $D(m,n)$,

Интересна также ситуация, когда ящики *неразличимы*. Она приводит к отдельной комбинаторной задаче о числе разбиений множества.

Задача. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым? Иными словами, сколькими способами можно представить m-элементное множество в виде объединения n непустых непересекающихся подмножеств?

Решение. Если ящики неразличимы, то любая перестановка n ящиков ничего не меняет, и поэтому число $D(m,n)$ разложений m различных шаров по n различным ящикам нужно разделить на $n!$:

$$S(m,n) = \frac{D(m,n)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Получилось число способов разложить m шаров по n неразличимым ящикам, или число способов представления m-элементного множества в виде объединения n непересекающихся непустых подмножеств. Числа $S(m,n)$ называются *числами Стирлинга второго рода*.

Теперь допустим, что ящики могут быть пустыми.

Задача. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

Решение. При произвольной раскладке наши m шаров окажутся лежащими в каких-то k ящиках ($1 \leqslant k \leqslant n$), а остальные $n-k$ ящиков будут пустовать. Такое разложение можно осуществить $S(m,k)$ способами. Суммируя по k, получим искомое число способов:

$$\sum_{k=1}^{n} S(m,k).$$

6 Задачи

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

$\boxed{8375}$

2. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковых цифры?

$\boxed{763920}$

3. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две единицы?

$\boxed{7623}$

4. (*ММО, 2006, 6, окружной этап*) В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

$\boxed{3}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8*) Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

$\boxed{8999999934}$

6. (*ММО, 2008, 7, окружной этап*) По данным опроса, проведённого в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются ещё и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

$\boxed{26}$

7. (*«Физтех», 2016, 9–10*) Рассматриваются всевозможные пятизначные числа, в которых цифры 9, 7, 3, 1, 0 используются ровно по одному разу. Найдите среднее арифметическое этих чисел. Ответ округлите до целого.

$\boxed{54166}$

8. Пусть A — множество букв слова «абракадабра», B — множество букв слова «бригантина», C — множество букв слова «каракатица». Выпишите множества A, B и C, найдите их всевозможные пересечения и проверьте формулу включений и исключений для трёх множеств.

9. (*ММО, 1938*) Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

$\boxed{686}$

10. (*«Ломоносов», 2012, 7*) Сколько чисел из набора 1, 2, . . . , 2010, 2011 не делятся ни на 3, ни на 7?

$\boxed{1149}$

11. (*«Физтех», 2014, 7, 8, 10*) На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игральных карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевёрнуто трижды?

$\boxed{17}$

12. (*«Физтех», 2013, 8–9*) Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один закрасил красным 75% листа, второй закрасил зелёным 70% листа, а третий закрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо закрашено всеми тремя цветами?

$\boxed{10\%}$

13. (*«Ломоносов», 2013, 9*) Найдите количество натуральных делителей числа $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{40}$, а) не являющихся ни точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами; б) не представимых в виде m^n, где m и n — натуральные числа, причём $n > 1$.

$\boxed{\text{а) 1093; б) 981}}$

14. (*«Высшая проба», 2014, 10*) В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знают польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные — ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?

$\boxed{52}$

15. (*«Высшая проба», 2014, 11*) В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

$\boxed{26}$

16. (*«Высшая проба», 2013, 11*) В стране шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Их хотят связать пятью авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

$\boxed{1296}$

17. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 9*) В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

$\boxed{360}$

18. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 11*) Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

$\boxed{450}$

19. (*«Физтех», 2014, 11*) Прямоугольный параллелепипед $35 \times 40 \times 56$, разбитый на 78400 единичных кубиков, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков протыкает игла?

$\boxed{112}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9*) Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

$\boxed{540}$