

# Уравнения высших порядков

## Содержание

1	Непосредственная группировка . . . . .	1
2	Подбор корня . . . . .	2
3	Формулы Виета для кубического уравнения . . . . .	3
4	Задачи . . . . .	4

Методы решения уравнений третьей и четвёртой степени (формула Кардано и метод Феррари) выходят за рамки программы обычной школы. Поэтому если на олимпиаде вам попадается уравнение степени 3 или выше, то следует искать искусственный приём, приспособленный для решения именно этого уравнения. Таким приёмом может быть, например, удачная группировка с последующим разложением на множители или выявление устойчивых выражений с соответствующей заменой переменной.

Данная статья посвящена уравнениям вида  $p(x) = 0$ , где  $p(x)$  — многочлен третьей степени и выше, и некоторым приёмам разложения такого многочлена на множители.

## 1 Непосредственная группировка

В простейших случаях многочлен удаётся разложить на множители, удачно группируя друг с другом слагаемые.

**ЗАДАЧА 1.** Решить уравнение  $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Имеем:

$$x^2(2x - 3) - 4(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

**ОТВЕТ:**  $3/2, \pm 2$ .

**ЗАДАЧА 2.** Решить уравнение  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Группируем первое слагаемое с четвёртым, а второе — с третьим:

$$(x^3 + 8) - (3x^2 + 6x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 5x + 4) = 0.$$

**ОТВЕТ:**  $-2, 1, 4$ .

**ЗАДАЧА 3.** (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Решите уравнение

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2 + 9x) - 36}{\sqrt{x + 3}} = 0.$$

**РЕШЕНИЕ.** Если поддасться искушению раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (тем более что сократится  $18x$ ), то в возникшем кубическом уравнении придётся подбирать корень с целью разложить левую часть на множители. Данная процедура описана в следующем пункте и не представляет здесь никаких сложностей, однако необходимости в ней сейчас нет. Дело в том,

что несколько вычурная запись условия содержит подсказку, как именно надо группировать слагаемые. Имеем:

$$\begin{aligned}x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2 + 9x) - 36 &= x(x^2 + 9x) - 2(x^2 + 9x) + 18x - 36 = \\ &= (x^2 + 9x)(x - 2) + 18(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 9x + 18) = (x - 2)(x + 3)(x + 6).\end{aligned}$$

Наше уравнение, таким образом, равносильно системе

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 3)(x + 6) = 0, \\ x + 3 > 0, \end{cases}$$

решением которой служит  $x = 2$ .

ОТВЕТ: 2.

## 2 Подбор корня

Если  $p(x)$  — многочлен, и  $x_0$  — корень уравнения  $p(x) = 0$ , то имеет место разложение на множители<sup>1</sup>:

$$p(x) = (x - x_0)q(x), \quad (1)$$

где  $q(x)$  — также некоторый многочлен (степень которого, как легко видеть, на единицу меньше степени многочлена  $p(x)$ ). Зная корень  $x_0$ , мы получаем разложение (1) путём последовательной группировки слагаемых.

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ .

РЕШЕНИЕ. Нетрудно видеть, что непосредственная группировка ничего хорошего не даёт. Однако можно убедиться прямым вычислением, что  $x = 2$  — корень данного уравнения, и поэтому левая часть должна иметь вид  $(x - 2)q(x)$ . Значит, нам нужно последовательно выделять слагаемые, дающие множитель  $x - 2$ :

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 14x + 12x - 24 = x^2(x - 2) - 7(x - 2) + 12(x - 2).$$

Теперь наше уравнение приобретает вид

$$(x - 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

и легко решается.

ОТВЕТ: 2, 3, 4.

Всё это замечательно, но как подобрать корень? Никакой общей процедуры, к сожалению, не существует. Тем не менее, в важном частном случае уравнения с *целыми* коэффициентами имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (2)$$

с целыми коэффициентами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  имеет целочисленный корень  $x_0$ , то  $x_0$  является делителем свободного члена  $a_n$ .

---

<sup>1</sup>Это следствие *теоремы Безу*, которая гласит, что остаток от деления многочлена  $p(x)$  на  $x - x_0$  равен  $p(x_0)$ ; значит, если  $x_0$  — корень многочлена  $p(x)$ , то указанный остаток равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку  $x_0$  — корень данного уравнения, имеет место равенство

$$x_0^n + a_1x_0^{n-1} + a_2x_0^{n-2} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -x_0^n - a_1x_0^{n-1} - a_2x_0^{n-2} - \dots - a_{n-1}x_0.$$

Как видим,  $a_n$  делится на  $x_0$ . Теорема доказана.

Вернёмся к уравнению  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ , рассмотренному выше. Делителями свободного члена  $-24$  служат числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12$  и  $\pm 24$ . Все корни данного уравнения (а именно, 2, 3 и 4) являются целыми числами и находятся среди указанных делителей.

Поэтому, пытаясь решить уравнение (2), мы ищем его корень среди делителей свободного члена (поочередно подставляя эти делители в уравнение). Если нам повезёт и один из делителей в самом деле окажется корнем, то мы разложим левую часть (2) на множители и упростим задачу<sup>2</sup>.

Теорема о целочисленном корне, сформулированная выше, относится к уравнению, в котором коэффициент при старшей степени  $x$  равен 1. А как быть в общем случае? Имеется соответствующее обобщение данной теоремы, но на практике можно обойтись и без него, просто умножая уравнение на подходящее число и вводя новую переменную.

ЗАДАЧА 5. Решить уравнение  $2x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0$ .

РЕШЕНИЕ. Умножим уравнение на 4 (чтобы первое слагаемое стало точным кубом):

$$8x^3 - 12x^2 - 20x + 12 = 0,$$

после чего введём новую переменную  $t = 2x$ :

$$t^3 - 3t^2 - 10t + 12 = 0.$$

Непосредственно убеждаемся, что  $t = 1$  — корень данного уравнения, и последовательно группируем:

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 - 10t + 12 &= t^3 - t^2 - 2t^2 + 2t - 12t + 12 = \\ &= t^2(t - 1) - 2t(t - 1) - 12(t - 1) = (t - 1)(t^2 - 2t - 12). \end{aligned}$$

Отсюда получаем два других корня:  $t = 1 \pm \sqrt{13}$ , и остаётся лишь найти соответствующие значения  $x$ .

ОТВЕТ:  $\frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ .

### 3 Формулы Виета для кубического уравнения

Предположим, что кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{3}$$

имеет три корня  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Тогда многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

---

<sup>2</sup>Но может случиться и так, что ни один делитель не подойдёт. Тогда уравнение (2) не имеет целочисленных корней, и придётся искать другие способы решить его. Такие ситуации будут рассмотрены в следующей статье «[Замена переменной](#)».



6. Решите уравнение:

а)  $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$ ;

в)  $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$ ;

б)  $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$ ;

г)  $x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0$ .

$$\boxed{x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0}$$

7. Решите уравнение:

а)  $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16 = 0$ ;

б)  $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0$ .

$$\boxed{x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0}$$

8. Решите уравнение:

а)  $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$ ;

б)  $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ ;

в)  $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ ;

г)  $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$ .

$$\boxed{4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0}$$

9. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Решить уравнение

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 10x - 3(x^2 + 7x) - 30}{\sqrt{x+2}} = 0.$$

$\boxed{3}$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) Решить уравнение

$$(6x - 15)^7 = (x - 1)^{14}.$$

$\boxed{4}$

11. («Ломоносов», 2011, 8) Решите уравнение

$$\frac{x^7 - 1}{x^5 - 1} = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}.$$

$\boxed{1-0}$

12. (Всеросс., 2017, МЭ, 11.1) Имеет ли отрицательные корни уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0?$$

13. («Пожори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Решите уравнение

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

$\boxed{0-1-}$

14. («Физтех», 2013, 9–11) Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0.$$

5–

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \quad \text{и} \quad y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

Одна точка с абсциссой  $\frac{2\sqrt{6}-2}{1}$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Какие значения может принимать выражение  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — несовпадающие между собой корни уравнения  $x^3 - 2015x + 2016 = 0$ ?

2015

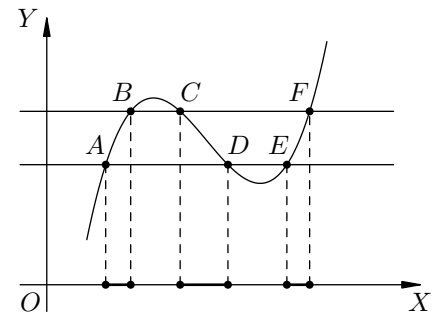
17. (ММО, 2018, 11.1) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)x^2 + 1.$$

18. (Всеросс., 1998, финал, 10) Прямые, параллельные оси  $OX$ , пересекают график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d :$$

первая — в точках  $A$ ,  $D$  и  $E$ , вторая — в точках  $B$ ,  $C$  и  $F$  (см. рисунок). Докажите, что длина проекции дуги  $CD$  на ось  $OX$  равна сумме длин проекций дуг  $AB$  и  $EF$ .



19. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите сумму  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , если известно, что три различных действительных числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют условиям:

$$x^3 + 1009 = 2018x, \quad y^3 + 1009 = 2018y, \quad z^3 + 1009 = 2018z$$

2

20. (ММО, 2016, 10.3) Уравнение с целыми коэффициентами  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента  $b$  при этих условиях.

9

21. («Ломоносов», 2014, 8–9) Известно, что  $x_1, x_2, x_3$  — различные корни уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Составьте уравнение наименьшей степени, корнями которого являются числа  $\frac{x_1+1}{x_1-1}, \frac{x_2+1}{x_2-1}$  и  $\frac{x_3+1}{x_3-1}$ .

$$\boxed{0 = 1 - \epsilon - \epsilon^2 - \epsilon^3}$$

22. («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения

$$x^5 + 2010x^2 + 2011 = x^4 + 2011x^3 + 2012x.$$

$$\boxed{4025}$$

23. (ММО, 2011, 11.2) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$$x^{2011} + 2011x - 1 \quad \text{и} \quad x^{2011} - 2011x + 1.$$

24. (ММО, 2017, 11.3) Пусть  $x_0$  — положительный корень уравнения  $x^{2017} - x - 1 = 0$ , а  $y_0$  — положительный корень уравнения  $y^{4034} - y = 3x_0$ .

а) Сравните  $x_0$  и  $y_0$ .

б) Найдите десятый знак после запятой числа  $|x_0 - y_0|$ .