Уравнения высших порядков

Содержание

Методы решения уравнений третьей и четвёртой степени (формула Кардано и метод Феррари) выходят за рамки программы обычной школы. Поэтому если на олимпиаде вам попадается уравнение степени 3 или выше, то следует искать искусственный приём, приспособленный для решения именно этого уравнения. Таким приёмом может быть, например, удачная группировка с последующим разложением на множители или выявление устойчивых выражений с соответствующей заменой переменной.

Данная статья посвящена уравнениям вида $p(x)=0$, где $p(x)$ — многочлен третьей степени и выше, и некоторым приёмам разложения такого многочлена на множители.

1 Непосредственная группировка

В простейших случаях многочлен удаётся разложить на множители, удачно группируя друг с другом слагаемые.

Задача 1. Решить уравнение $2x^3-3x^2-8x+12=0$.

Решение. Имеем:

$$x^2(2x-3)-4(2x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x-3)(x^2-4)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x-3)(x-2)(x+2)=0.$$

Ответ: $3/2$, ± 2.

Задача 2. Решить уравнение $x^3-3x^2-6x+8=0$.

Решение. Группируем первое слагаемое с четвёртым, а второе — с третьим:

$$(x^3+8)-(3x^2+6x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+2)(x^2-2x+4)-3x(x+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+2)(x^2-5x+4)=0.$$

Ответ: -2, 1, 4.

Задача 3. (*МГУ, социологич. ф-т, 2004*) Решите уравнение

$$\frac{x^3+9x^2+18x-2(x^2+9x)-36}{\sqrt{x+3}}=0.$$

Решение. Если поддаться искушению раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (тем более что сократится $18x$), то в возникшем кубическом уравнении придётся подбирать корень с целью разложить левую часть на множители. Данная процедура описана в следующем пункте и не представляет здесь никаких сложностей, однако необходимости в ней сейчас нет. Дело в том, что несколько вычурная запись условия содержит подсказку, как именно надо группировать слагаемые. Имеем:

$$
\begin{aligned}
x^3+9x^2+18x-2(x^2+9x)-36 &= x(x^2+9x)-2(x^2+9x)+18x-36 = \\
&= (x^2+9x)(x-2)+18(x-2) = (x-2)(x^2+9x+18) = (x-2)(x+3)(x+6).
\end{aligned}
$$

Наше уравнение, таким образом, равносильно системе

$$
\begin{cases} (x-2)(x+3)(x+6)=0, \\ x+3>0, \end{cases}
$$

решением которой служит $x=2$.

Ответ: 2.

2 Подбор корня

Если $p(x)$ — многочлен, и x_0 — корень уравнения $p(x)=0$, то имеет место разложение на множители[1]:

$$
p(x)=(x-x_0)q(x), \tag{1}
$$

где $q(x)$ — также некоторый многочлен (степень которого, как легко видеть, на единицу меньше степени многочлена $p(x)$). Зная корень x_0, мы получаем разложение (1) путём последовательной группировки слагаемых.

Задача 4. Решить уравнение $x^3-9x^2+26x-24=0$.

Решение. Нетрудно видеть, что непосредственная группировка ничего хорошего не даёт. Однако можно убедиться прямым вычислением, что $x=2$ — корень данного уравнения, и поэтому левая часть должна иметь вид $(x-2)q(x)$. Значит, нам нужно последовательно выделять слагаемые, дающие множитель $x-2$:

$$
x^3-9x^2+26x-24 = x^3-2x^2-7x^2+14x+12x-24 = x^2(x-2)-7(x-2)+12(x-2).
$$

Теперь наше уравнение приобретает вид

$$
(x-2)(x^2-7x+12)=0
$$

и легко решается.

Ответ: 2, 3, 4.

Всё это замечательно, но как подобрать корень? Никакой общей процедуры, к сожалению, не существует. Тем не менее, в важном частном случае уравнения с *целыми* коэффициентами имеет место следующее утверждение.

Теорема. Если уравнение

$$
x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{2}
$$

с целыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет целочисленный корень x_0, то x_0 является делителем свободного члена a_n.

[1] Это следствие *теоремы Безу*, которая гласит, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x-x_0$ равен $p(x_0)$; значит, если x_0 — корень многочлена $p(x)$, то указанный остаток равен нулю.

Доказательство. Поскольку x_0 — корень данного уравнения, имеет место равенство

$$x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + a_2 x_0^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -x_0^n - a_1 x_0^{n-1} - a_2 x_0^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x_0.$$

Как видим, a_n делится на x_0. Теорема доказана.

Вернёмся к уравнению $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, рассмотренному выше. Делителями свободного члена -24 служат числа ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 и ±24. Все корни данного уравнения (а именно, 2, 3 и 4) являются целыми числами и находятся среди указанных делителей.

Поэтому, пытаясь решить уравнение (2), мы ищем его корень среди делителей свободного члена (поочерёдно подставляя эти делители в уравнение). Если нам повезёт и один из делителей в самом деле окажется корнем, то мы разложим левую часть (2) на множители и упростим задачу[2].

Задача 5. (*«Ломоносов», 2011, 11*) При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx \tag{3}$$

состоит в точности из чисел -1 и 1?

Решение. Число $x = 1$ является корнем уравнения (3) в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$3 + a + b = c. \tag{4}$$

Аналогично, $x = -1$ является корнем уравнения (3) тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$1 + a + b = -c. \tag{5}$$

Вычитая из равенства (4) равенство (5), получим $c = 1$. Тогда любое из этих равенств приводит к соотношению $b = -a - 2$. В итоге уравнение (3) принимает вид

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = 0. \tag{6}$$

Как мы уже знаем, уравнение (6) имеет корни ±1, поэтому выделяем множитель $x^2 - 1$:

$$\begin{aligned}&x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 =\\ &\quad = (x^5 - x^3) + (x^3 - x) + (2x^4 - 2x^2) + (2x^2 - 2) + (ax^2 - a) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2).\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (6) имеет вид

$$(x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2) = 0.$$

Множество корней данного уравнения состоит из чисел ±1 и корней уравнения

$$x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0. \tag{7}$$

При любом a уравнение (7) имеет хотя бы один корень, поскольку функция $y = x^3 + 2x^2 + x + a + 2$ является непрерывной, принимает отрицательные значения при $x \to -\infty$ и положительные — при $x \to +\infty$, и, стало быть при некотором x обращается в нуль. Нам нужно, чтобы корни уравнения (7) не отличались от ±1.

---

[2] Но может случиться и так, что ни один делитель не подойдёт. Тогда уравнение (2) не имеет целочисленных корней, и придётся искать другие способы решить его. Такие ситуации будут рассмотрены в следующей статье «Замена переменной».

Если $x = 1$ является корнем уравнения (7), то выполнено

$$4 + a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -6.$$

Это необходимое условие на параметр a; проверим его достаточность[3]. Подставляем $a = -6$ в уравнение (7):

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x^2 + 3x + 4) = 0.$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 3x + 4$ не имеет корней, так что $x = 1$ — единственный корень уравнения (7). Следовательно, в случае $a = -6$ (и соответственно $b = 4$, $c = 1$) корни уравнения (3) в самом деле образуют множество $\{-1, 1\}$.

Если же $x = -1$ является корнем уравнения (7), то выполнено

$$a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2.$$

При таком a уравнение (7) принимает вид

$$x^3 + 2x^2 + x = 0$$

и имеет корень $x = 0$ (который соответственно является корнем исходного уравнения (3)). Поэтому значение $a = -2$ нам не подходит.

Ответ: $a = -6$, $b = 4$, $c = 1$.

Задача 6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения

$$\left(a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013\right) x = a^3 + 3a^2 - 6a - 8 \tag{8}$$

есть неотрицательные числа.

Решение. Многочлен $a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013$ имеет корень $a = -1$ и раскладывается на множители:

$$a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013 = (a+1)\left(a^3 + 2013a^2 + a + 2013\right).$$

Кубический многочлен в скобках раскладывается на множители непосредственной группировкой:

$$a^3 + 2013a^2 + a + 2013 = \left(a^2 + 1\right)(a + 2013).$$

Аналогично раскладывается на множители и правая часть уравнения (8):

$$a^3 + 3a^2 - 6a - 8 = \left(a^3 - 8\right) + 3a(a-2) = (a-2)\left(a^2 + 5a + 4\right) = (a-2)(a+1)(a+4).$$

Таким образом, уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$(a+1)\left(a^2+1\right)(a+2013)x = (a-2)(a+1)(a+4). \tag{9}$$

Если $a = -1$, то уравнение (9) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Решением такого уравнения является любое число (в частности, неотрицательное). Поэтому значение $a = -1$ годится.

Если $a = -2013$, то уравнение (9) принимает вид $0 \cdot x = -2015 \cdot 2012 \cdot 2009$. Такое уравнение не имеет корней. Значит, данное значение a не подходит.

Если $a \neq -1$ и $a \neq -2013$, то уравнение (9) имеет единственное решение

$$x = \frac{(a-2)(a+4)}{(a^2+1)(a+2013)}.$$

[3] О понятиях необходимости и достаточности рассказано в статье «Необходимые и достаточные условия».

Остаётся найти все те значения a, при которых выполнено неравенство

$$\frac{(a-2)(a+4)}{(a^2+1)\,(a+2013)} \geqslant 0.$$

Это легко делается методом интервалов.

Ответ: $(-2013;-4] \cup \{-1\} \cup [2;+\infty)$.

Теорема о целочисленном корне, сформулированная выше, относится к уравнению, в котором коэффициент при старшей степени x равен 1. А как быть в общем случае? Имеется соответствующее обобщение данной теоремы, но на практике можно обойтись и без него, просто умножая уравнение на подходящее число и вводя новую переменную.

Задача 7. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0$.

Решение. Умножим уравнение на 4 (чтобы первое слагаемое стало точным кубом):

$$8x^3 - 12x^2 - 20x + 12 = 0,$$

после чего введём новую переменную $t = 2x$:

$$t^3 - 3t^2 - 10t + 12 = 0.$$

Непосредственно убеждаемся, что $t = 1$ — корень данного уравнения, и последовательно группируем:

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 - 10t + 12 &= t^3 - t^2 - 2t^2 + 2t - 12t + 12 = \\ &= t^2(t-1) - 2t(t-1) - 12(t-1) = (t-1)(t^2 - 2t - 12). \end{aligned}$$

Отсюда получаем два других корня: $t = 1 \pm \sqrt{13}$, и остаётся лишь найти соответствующие значения x.

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

3 Формулы Виета для кубического уравнения

Предположим, что кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{10}$$

имеет три корня x_1, x_2 и x_3. Тогда многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Раскроем в этом равенстве скобки и приведём подобные слагаемые:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3. \tag{11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}\,, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}\,, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}\,. \end{cases} \tag{12}$$

Соотношения (12) называются *формулами Виета* для кубического уравнения (10).

Задача 8. (*МГУ, социологич. ф-т, 2003*) Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 15a)x^2 + 12ax - 216 = 0 \tag{13}$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Решение. Запишем формулы Виета для уравнения (13):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15a - a^2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12a, \\ x_1x_2x_3 = 216. \end{cases} \tag{14}$$

Числа x_1, x_2 и x_3 (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда выполнено равенство $x_2^2 = x_1x_3$ (см. статью «Геометрическая прогрессия»). В таком случае из третьего уравнения системы (14) находим $x_2^3 = 216$, то есть $x_2 = 6$, и тогда $x_1x_3 = 36$. Подставляя это в первые два уравнения (14), получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15a - a^2 - 6, \\ 6(x_1 + x_2) = 12a - 36, \end{cases}$$

откуда

$$15a - a^2 - 6 = 2a - 6 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 13a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ или } a = 13.$$

Мы получили *необходимое* условие на параметр a: именно, предположив, что корни образуют геометрическую прогрессию, мы пришли к выводу, что a может принимать лишь значения 0 или 13 (и никакие другие). Но пока не факт, что оба полученных значения годятся, и теперь надо проверить *достаточность*: при каком из этих значений a имеются три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Если $a = 0$, то уравнение (13) принимает вид $x^3 - 216 = 0$; это уравнение имеет единственный корень $x = 6$. Поэтому значение $a = 0$ не годится.

Если $a = 13$, то уравнение (13) принимает вид

$$x^3 - 26x^2 + 156x - 216 = 0.$$

Знание корня $x = 6$ облегчает разложение на множители:

$$\begin{aligned} 0 = (x^3 - 216) - (26x^2 - 156) = (x - 6)(x^2 + 6x + 36) - 26(x - 6) = \\ = (x - 6)(x^2 - 20x + 36) = (x - 6)(x - 2)(x - 18). \end{aligned}$$

Как видим, уравнение имеет три различных корня 2, 6 и 18, которые образуют геометрическую прогрессию. Следовательно, значение $a = 13$ нам подходит.

Ответ: $a = 13$; корни 2, 6, 18.

4 Задачи

1. Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0$; б) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = 0$;

в) $x^3 + 6x^2 - 12x - 8 = 0$; г) $x^3 + 7x^2 + 21x + 27 = 0$.

а) -3, $\pm\sqrt{5}$; б) 2, $\sqrt[3]{3}$; в) 2, $-4 \pm 2\sqrt{3}$; г) -3

2. Решите уравнение:

а) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$; б) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$;

в) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$; г) $27x^3 - 15x^2 + 5x - 1 = 0$.

а) $-2, -\frac{3}{2}$; б) $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$

3. (*«Физтех», 2016, 9*) Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где a и b — соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 7x^2 + 7x = 1$.

34

4. Решите уравнение:

а) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$; б) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$;

в) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$; г) $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

а) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 3; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

5. Решите уравнение:

а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; б) $x^3 - 13x - 12 = 0$;

в) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$; г) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$;

д) $x^3 - 3x + 2 = 0$; е) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

а) 1, 2, 3; б) $-1, -3, 4$; в) 1; г) $-1, 2$; д) $1, -2$; е) $-1, 2, 3$

6. Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$; б) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$;

в) $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$; г) $x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0$.

а) $-2, 3, -4$; б) $2, -3, 5$; в) 3; г) $-3, -1 \pm \sqrt{2}$

7. Решите уравнение:

а) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16 = 0$; б) $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0$.

а) $1, \pm 2, -4$; б) $-1, 3$

8. Решите уравнение:

а) $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$; б) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0;$;

в) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$; г) $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

а) $\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\pm\frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

9. (*МГУ, социологич. ф-т, 2004*) Решить уравнение

$$\frac{x^3+7x^2+10x-3(x^2+7x)-30}{\sqrt{x+2}}=0.$$

$\boxed{3}$

10. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2005*) Решить уравнение

$$(6x-15)^7=(x-1)^{14}.$$

$\boxed{4}$

11. (*«Ломоносов», 2011, 8*) Решите уравнение

$$\frac{x^7-1}{x^5-1}=\frac{x^5-1}{x^3-1}\,.$$

$\boxed{0,\ -1}$

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Решите уравнение

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{10}\right)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^6\right)^2.$$

$\boxed{-1,\ 0}$

13. (*«Ломоносов», 2011, 11*) При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5+2x^4+ax^2+bx=c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1?

$\boxed{a=-6,\ b=-1,\ c=-4}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения

$$\left(a^4-2014a^3+2014a^2-2014a+2013\right)x=a^3+5a^2+2a-8$$

есть неотрицательные числа.

$\boxed{[-4;-2]\cup\{1\}\cup(2013;+\infty)}$

15. (*«Физтех», 2013, 9–11*) Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$x^3+6x^2+12x+35=0.$$

$\boxed{-5}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \quad \text{и} \quad y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

Одна точка с абсциссой $\frac{1}{2-\sqrt[3]{7}}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Какие значения может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3-2015x+2016=0$?

2015

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 - ax^2 - (a^3 - 6a^2 + 5a + 8)x - (a-3)^3 = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию (укажите эти корни).

Если $a = 2$, то $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, -1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; если $a = 4$, то $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) Найдите все целочисленные значения a, b, c такие, что существуют три различных корня уравнения

$$x^3 + (8+b)x^2 + (b+4)x + (c+3) = 0,$$

которые являются корнями уравнения

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

$a = 5$, $b = -5$, $c = -6$

20. (*МГУ, социологич. ф-т, 2003*) Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

$a = 7$; корни 2, 4, 8

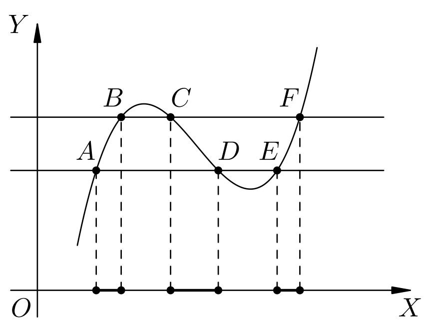
21. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.1*) Имеет ли отрицательные корни уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0\,?$$

22. (*Всеросс., 1998, финал, 10*) Прямые, параллельные оси OX, пересекают график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d:$$

первая — в точках A, D и E, вторая — в точках B, C и F (см. рисунок). Докажите, что длина проекции дуги CD на ось OX равна сумме длин проекций дуг AB и EF.



23. (*«Ломоносов», 2014, 8–9*) Известно, что x_1, x_2, x_3 — различные корни уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Составьте уравнение наименьшей степени, корнями которого являются числа $\frac{x_1+1}{x_1-1}$, $\frac{x_2+1}{x_2-1}$ и $\frac{x_3+1}{x_3-1}$.

$\boxed{t^3 - 7t^2 - t - 1 = 0}$

24. (*«Ломоносов», 2012, 10–11*) Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения

$$x^5 + 2010x^2 + 2011 = x^4 + 2011x^3 + 2012x.$$

$\boxed{4025}$

25. (*ММО, 2016, 10*) Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

$\boxed{6}$