

## Параметры. Графики

Данный листок посвящён задачам с параметрами, в которых существенную помощь оказывает построение графиков функций или областей на координатной плоскости.

1. («Физтех», 2017, 9) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} 3|y| - 4|x| = 6, \\ x^2 + y^2 - 14y + 49 - a^2 = 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$\{6; 9\} \cap \{8; 7\} \cap (9; 6) \cup (9; 6; 7; 5; 7) \cup (6; 9)$$

2. («Физтех», 2017, 9) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$\left\{ \frac{21}{8} \wedge \frac{9}{8} \right\} \cap \left( \frac{5}{9}; 7 \right) \cap \left( 7 - \frac{5}{9}; - \right) \cup (9; 7; 2; 9)$$

3. («Физтех», 2016, 9) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a|2 - x| + \frac{x^2 - x - 6}{3 - x} = 0$$

имеет ровно одно решение.

$$\{9\} \cap [1; 1)$$

4. («Ломоносов», 2008) При каких значениях  $a$  существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = a? \end{cases}$$

$$\{9; 49\}$$

5. («Физтех», 2016, 10–11) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y + 9| + |x + 2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$\{9; 23 + 4\sqrt{15}\}$$

6. (ОММО, 2014) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $|\ln|x|| = ax$  имеет три решения.

$$\left( \frac{e}{1}; 0 \right) \cap \left( 0; \frac{e}{1} \right)$$

7. (ОММО, 2015, 11) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\ln(x - 2a) - 3(x - 2a)^2 + 2a = 0$$

имеет единственный корень?

$$\left[ \frac{7}{9} ; \frac{1}{3} \right]$$

8. («Физтех», 2012) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 2x - 4y - 5, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \leq 8y - 14x - 61 + 12a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$$\{2, 3\}$$

9. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся такое число  $b$ , что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

$$\left( \infty + ; \frac{7}{1} - \frac{2}{3} \wedge - \right]$$

10. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых найдётся число  $a$  такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

$$\left( \infty + ; \frac{8}{3} \right] \cap (0 ; \infty -)$$

11. («Физтех», 2015, 10) Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых найдётся число  $a$  такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = \frac{9}{(x + a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

$$\{2; \pi - \}$$

12. («Физтех», 2015, 11) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся число  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = 15 \cos(x - b) - 8 \sin(x - b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

[47:47-]

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) При каких значениях параметра  $a$  площадь фигуры, заданной на плоскости  $(x, y)$  системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - ay \leq 1 - \frac{5a^2}{4}, \\ y^2 + 4xy + 4x^2 \leq 25a^2, \end{cases}$$

максимальна?

$\frac{5a^2}{4} \leq |v|$

14. («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите все значения  $a > 0$ , при каждом из которых из неравенства  $x^2 + y^2 \leq a$  следует неравенство  $(|x| + 4)(|y| + 4) \leq 49$ .

[81:0]

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых для любого значения  $b$  система

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (|y - 1| - 1)^2 = 4, \\ y = b|x + 2| + a \end{cases}$$

имеет решения.

[ $\frac{5a^2}{4} + 2; \frac{5a^2}{4} -$ ]

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найти все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leq a - |x - 1|, \\ (y - 4)(y + 3) \geq (4 - x)(3 + x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$L = v$

17. (ОММО, 2012) При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} |x| + |y| + ||x| - |y|| = 6, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет наибольшее возможное число решений?

(9:8)

18. («Физтех», 2013) При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + 3y^2)(y^2 - 25) \geq 0, \\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leq a? \end{cases}$$

[4;6]

19. («Физтех», 2013) При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (3x^2 + 3xy + 2y^2)(|x + y| - 8) \geq 0, \\ x(x - 4) + y(y - 2) = a? \end{cases}$$

[7/15; 0]

20. («Физтех», 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x + 2| - 2y = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

[2 + √2]

21. («Физтех», 2011) Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = |b + y^2|, \\ y = a(x - b^2) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра  $a$ .

[∞ =: 1] ∩ [0:∞-)

22. («Физтех», 2009) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 \leq 6(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 + 2x = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

[9:1 - √17] ∩ [√17 - 1; 9-]

23. («Физтех», 2007) Найти все значения параметра  $a$ , при которых существует ровно две пары действительных чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (y + 8 - x^2)(2x + |y|) = 0, \\ 2ax - y = 8 + a^2. \end{cases}$$

{-4, -2} ∪ [-1; 1]

24. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите наибольшее значение  $x + y$ , если числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

$[-1; 1]$

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите множество значений выражения  $x - y + 1$  при условии

$$(x - y)^2 = 2|2y - x| + x + 15.$$

$(-\infty; -9] \cup [7; \infty)$

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) На координатной плоскости изобразите множество точек  $(a, b)$ , для каждой из которой область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{2a-b-x}{2a-b+x}} \left( \frac{x-a-b}{x+a+b} \right)$$

не содержит ни одной точки из отрезка  $[1; 2]$

27. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра  $b$  такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a - 2 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра  $a$ .

$(-\infty; -0.1] \cup [0.1; \infty)$

28. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых существует значение параметра  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin \left( \frac{a-y}{3} \right) = \arcsin \left( \frac{4-x}{4} \right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$(\frac{8}{25}; \frac{8}{31})$

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все отрицательные  $a$ , при которых уравнение

$$\frac{6\pi a - \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 4} = 0$$

имеет ровно три решения, принадлежащих множеству  $[\pi; +\infty)$ .

$(-\frac{5}{3}; -\frac{5}{2}; -\frac{5}{1})$

30. (МГУ, ф-т психологии, 2004) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$$

имеет ровно три различных решения.

1:0

31. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a + 4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости  $(x, y)$  множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

a)  $12 + 25\pi - 25\arcsin\frac{5}{3}; 6, -6, -3$

32. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4\cos\frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости  $(x, y)$  множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

a)  $2\pi, 9\pi - 60, 9\pi$

33. (ОММО, 2010) Изобразите на координатной плоскости множество точек  $(a, b)$  таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$|a| \geq |b|$