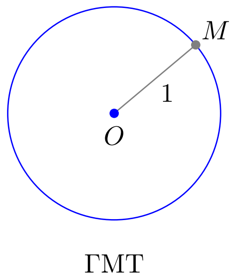
# Геометрическое место точек

Предположим, что имеется некоторое условие (назовём его $S$), сформулированное для произвольной точки $M$ на плоскости.

Пусть, например, $O$ — фиксированная точка плоскости, и условие $S$ звучит так: «расстояние от точки $O$ до точки $M$ равно 1». Интересен вопрос: где находятся *все* такие точки $M$? Ответ ясен — все такие точки $M$ расположены на окружности с центром в точке $O$ и радиусом 1 (рис. 1, слева). Любая точка $M$ этой окружности удовлетворяет равенству $OM = 1$ (условие $S$ выполнено), а для всякой точки $M$, не лежащей на данной окружности, справедливо неравенство $OM \neq 1$ (условие $S$ не выполнено).

Для описания подобных ситуаций как раз и применяется специальный термин «геометрическое место точек».

*Геометрическое место точек* (ГМТ), удовлетворяющих условию $S$, — это множество *всех* точек плоскости, удовлетворяющих данному условию. Иными словами, любая точка из ГМТ удовлетворяет условию $S$, а всякая точка, не лежащая в ГМТ, этому условию не удовлетворяет. Можно сказать, что ГМТ является «максимальным» множеством точек плоскости, удовлетворяющих условию $S$.



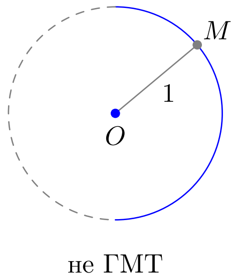




Рис. 1. ГМТ точек $M$ таких, что $OM = 1$

Вернёмся к рассмотренному выше примеру. Окружность с центром $O$ и радиусом 1 — это геометрическое место точек, удалённых от точки $O$ на расстояние 1 (рис. 1, слева). А вот правая полуокружность, например, уже не будет геометрическим местом точек, удовлетворяющих данному условию (рис. 1, справа). В самом деле, хотя для любой точки $M$ правой полуокружности выполнено $OM = 1$, найдутся и другие точки (а именно, левая полуокружность), для которых это условие также выполнено. Иными словами, полуокружность не есть «максимальное» множество точек, удовлетворяющих данному условию, а значит — не ГМТ.

В данной статье рассматриваются два важнейших примера ГМТ — серединный перпендикуляр к отрезку и биссектриса угла.

## Серединный перпендикуляр

*Серединный перпендикуляр* к отрезку — это прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину.

Теорема. Серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов данного отрезка.

Доказательство. Во-первых, мы должны доказать, что любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка. Во-вторых, нужно доказать, что никакая другая точка этому условию не удовлетворяет, то есть серединный перпендикуляр содержит все точки, равноудалённые от концов отрезка.

Таким образом, нам нужно доказать два взаимно-обратных утверждения:

1. *если точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, то она равноудалена от концов отрезка*;

2. *если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку.*

Докажем первое утверждение. Пусть $C$ — середина отрезка $AB$. Проведём серединный перпендикуляр $p$ и выберем на нём произвольную точку $M$ (рис. 2, слева).

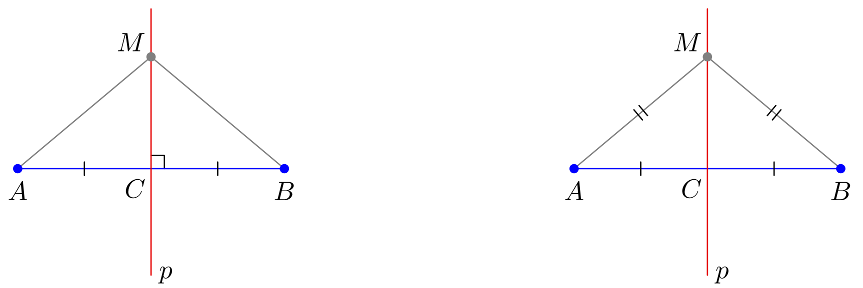



Рис. 2. ГМТ точек, равноудалённых от концов отрезка

Если $M$ совпадает с $C$, то доказывать нечего. Пусть $M$ не совпадает с $C$. Проведём отрезки $AM$ и $BM$. В прямоугольных треугольниках $ACM$ и $BCM$ катеты $AC$ и $BC$ равны, катет $CM$ — общий. Следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, и потому $AM = BM$. Значит, точка $M$ равноудалена от концов отрезка $AB$. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть точка $M$ равноудалена от концов отрезка $AB$ (рис. 2, справа). Через $M$ и середину $C$ отрезка $AB$ проведём прямую $p$.

В треугольниках $ACM$ и $BCM$ имеем: $AC = BC$, $AM = BM$, сторона $CM$ — общая. Следовательно, эти треугольники равны по трём сторонам. Поэтому равны углы $ACM$ и $BCM$ (они являются соответствующими, поскольку лежат напротив равных сторон). Но в то же время эти углы являются смежными и дают в сумме $180°$. Значит, оба этих угла равны $90°$, то есть прямая $p$ перпендикулярна $AB$.

Итак, прямая $p$ — серединный перпендикуляр к отрезку $AB$. Второе утверждение тем самым доказано, а вместе с тем доказана и теорема.

**Задача 1.** Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

*Решение.* В треугольнике $ABC$ проведём серединные перпендикуляры $p_1$ и $p_2$ к сторонам $AB$ и $BC$ соответственно (рис. 3). Пусть $p_1$ и $p_2$ пересекаются в точке $O$.

Поскольку точка $O$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$, она равноудалена от концов этого отрезка: $OA = OB$.

Поскольку точка $O$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $BC$, она равноудалена от концов этого отрезка: $OB = OC$.

Итак, три отрезка $OA$, $OB$ и $OC$ равны друг другу. Поскольку $OA = OC$, точка $O$ лежит на серединном перпендикуляре $p_3$ к отрезку $AC$.

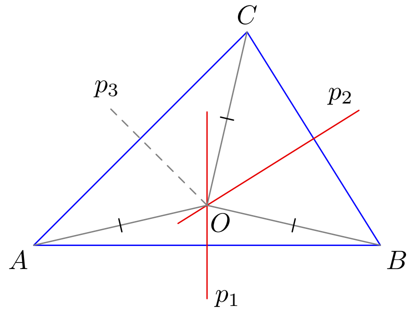



Рис. 3. К задаче 1

Следовательно, три серединных перпендикуляра $p_1$, $p_2$ и $p_3$ пересекаются в точке $O$, что и требовалось доказать.

Давайте снова взглянем на рис. 3. Если воткнуть иглу циркуля в точку $O$ и нарисовать окружность радиусом $OA = OB = OC$, то эта окружность пройдёт через три вершины $A$, $B$ и $C$ нашего треугольника.

Окружность, которая проходит через все вершины треугольника, называется *описанной* вокруг этого треугольника. Мы видим, что *вокруг любого треугольника можно описать окружность, и притом единственную; центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.*

## Биссектриса угла

Мы будем говорить об углах, меньших развёрнутого угла. Напомним, что расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Теорема. Биссектриса угла есть геометрическое место внутренних точек угла, равноудалённых от сторон угла.

Доказательство. Во-первых, мы должны доказать, что любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла. Во-вторых, нам нужно доказать, что никакие другие внутренние точки угла этому условию не удовлетворяют, то есть биссектриса содержит все точки, равноудалённые от сторон угла.

Таким образом, как и выше, мы должны доказать два утверждения:

1. *если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла;*
2. *если внутренняя точка угла равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.*

Докажем первое утверждение. Пусть $l$ — биссектриса угла $AOB$ (рис. 4, слева). Возьмём на биссектрисе произвольную точку $M$ и проведём перпендикуляры $MP$ и $MQ$ к сторонам угла.

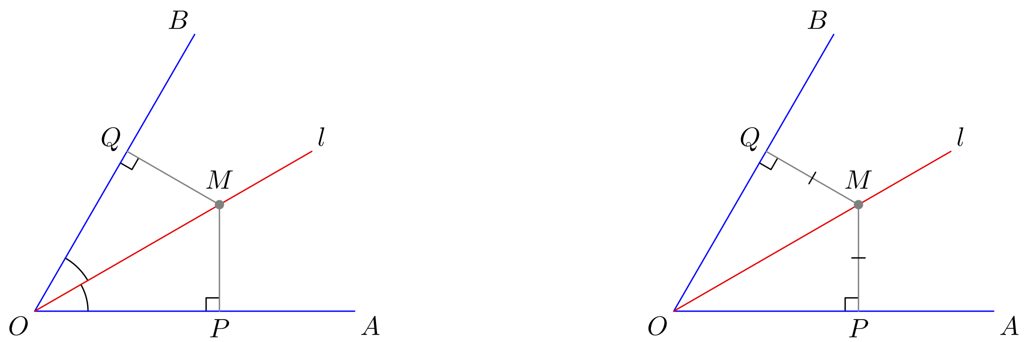



Рис. 4. ГМТ точек, равноудалённых от сторон угла

В прямоугольных треугольниках $OMP$ и $OMQ$ гипотенуза $OM$ — общая и, кроме того, $\angle MOP = \angle MOQ$. Следовательно, $\Delta OMP = \Delta OMQ$ по гипотенузе и острому углу, и потому $MP = MQ$. Таким образом, точка $M$ равноудалена от сторон угла. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $M$ — внутренняя точка угла $AOB$, равноудалённая от его сторон (рис. 4, справа). Проведём луч $l = OM$.

Снова рассмотрим прямоугольные треугольники $OMP$ и $OMQ$. У них гипотенуза $OM$ — общая и, кроме того, $MP = MQ$. Следовательно, $\Delta OMP = \Delta OMQ$ по гипотенузе и катету, и потому $\angle MOP = \angle MOQ$. Таким образом, $l$ — биссектриса угла $AOB$. Второе утверждение доказано, а вместе с ним доказана и теорема.

**Задача 2.** Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

*Решение.* Пусть биссектрисы углов $A$ и $B$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Опустим перпендикуляры $ON$, $OP$, $OQ$ на стороны треугольника (рис. 5).

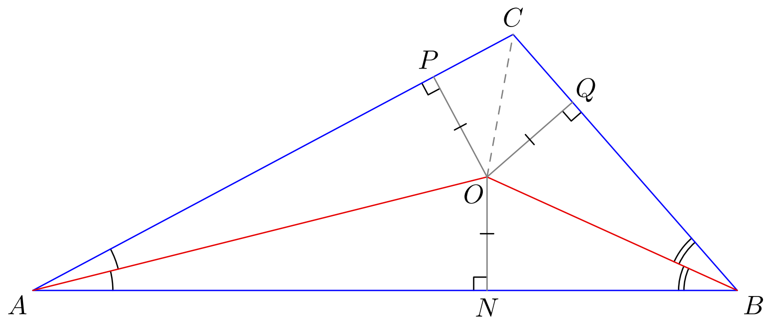



Рис. 5. К задаче 2

Поскольку точка $O$ лежит на биссектрисе угла $A$, она равноудалена от сторон этого угла: $ON = OP$. В тоже время точка $O$ лежит на биссектрисе угла $B$, поэтому $ON = OQ$.

Следовательно, $OP = OQ$, то есть точка $O$ равноудалена от сторон угла $C$. Значит, $O$ лежит на биссектрисе этого угла. Таким образом, биссектрисы углов $A$, $B$, $C$ пересекаются в точке $O$, что и требовалось доказать.

Воткнём иглу циркуля в точку $O$ и нарисуем окружность радиуса $ON = OP = OQ$. Эта окружность коснётся сторон $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$.

Окружность, касающаяся всех сторон треугольника, называется *вписанной* в этот треугольник. Мы видим, что *в любой треугольник можно вписать окружность, и притом единственную; центр вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис треугольника.*