Геометрические задачи на экстремум

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

$\boxed{27}$

2. (*«Ломоносов», 2016*) Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех рёбер равна $36\sqrt{2}$.

$\boxed{72}$

3. (*«Ломоносов», 2014*) Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 4. Найдите острый угол ромба.

$\boxed{2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}}$

4. (*«Ломоносов», 2015*) Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

$\boxed{2\sqrt{7}}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012*) Найдите максимально возможное отношение объёма конуса к объёму шара, содержащего этот конус.

$\boxed{\frac{8}{27}}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012*) Высота правильной треугольной пирамиды, проведённая из вершины основания к противоположной боковой грани, равна 4. Какие значения может принимать площадь полной поверхности такой пирамиды?

$\boxed{\left[\frac{64}{\sqrt{3}}; +\infty\right)}$

7. (*«Физтех», 2012*) Рассматриваются всевозможные правильные треугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

$\boxed{\text{а) } \frac{2a^3}{3}; \text{ б) } 120^\circ}$

8. (*«Физтех», 2012*) Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

$\boxed{\text{а) } \frac{8a^3}{9\sqrt{3}}; \text{ б) } \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)}$

9. (*«Физтех», 2012*) Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

а) $\frac{4a^3}{9\sqrt{3}}$; б) 120°

10. (*«Физтех», 2012*) Рассматриваются всевозможные правильные шестиугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

а) $\frac{a^3}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$

11. (*МФТИ, 2008*) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = = 3$, $BC = 2$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN = MC = 3MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найдите объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

$\frac{18}{\sqrt{35}}$; $\frac{\sqrt{29435}}{17}$

12. (*«Ломоносов», 2011*) Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 16 и боковым ребром 15?

$8\sqrt{2}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Одно основание правильной n-угольной призмы ($n \geqslant 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы?

$0 < V \leqslant 16n \sin\frac{2\pi}{n}$ при фиксированном n; $0 < V < 32\pi$ при произвольном n

14. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{1}{3}$?

$5\sqrt{23}$

15. (*«Высшая проба», 2016, 11*) Два коридора высотой и шириной в 1 м идут перпендикулярно друг другу по первому и второму этажу здания. Разделяющее их перекрытие разобрано, образуя дыру 1×1 м в полу одного и в потолке другого. Какова максимальная длина балки, которую можно передать из одного коридора в другой через дыру? (Балку считать негнущимся отрезком нулевой толщины. Толщина перекрытия также равна нулю, т. е. пол верхнего коридора и потолок нижнего коридора находятся в одной плоскости.)

$\frac{1}{2}\left(2+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}$