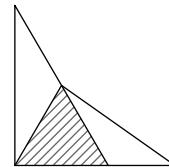


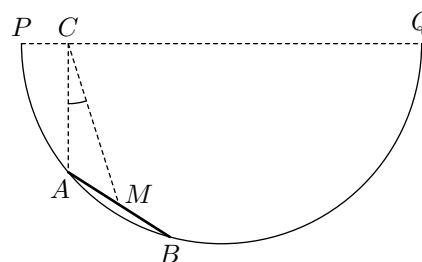
Геометрия. Олимпиады-2014

Данный листок содержит задачи по планиметрии, которые предлагались на различных олимпиадах в 2013–2014 учебном году.

1. (*Математический праздник, 2014, 7*) Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник равнобедренный.



2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9*) Знаменитый скейтер Тони Хок катается на скейтборде (отрезок AB) в рампе, которая представляет собой полуокружность с диаметром PQ . Точка M — середина скейтборда, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на диаметр PQ . Какие значения может принимать угол ACM , если известно, что угловая мера дуги AB равна 24° ?



121

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7*) Леночка собралась испечь пирог на день рождения. Она раскатала тесто равномерным слоем в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Потом она подумала, что теста хватит на два пирога, и провела из точки на гипотенузе два прямолинейных разреза, параллельных катетам треугольника. Получилось два треугольника и один прямоугольник.

Из прямоугольника Леночка испекла пирог с клубникой, а треугольники слепила вместе, раскатала и испекла пирог с капустой. Может ли получиться так, что в пироге с клубникой теста больше, чем в пироге с капустой?

Нет

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) Из точки, расположенной на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, опущены перпендикуляры на катеты. Эти перпендикуляры разбивают данный треугольник на три части — два треугольника и прямоугольник. Может ли площадь каждой из этих частей составлять менее $4/9$ площади исходного треугольника?

Нет

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона BC , чтобы угол ACB был максимально возможным?

11^

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC . Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59^\circ$ и $\angle B = 63^\circ$. Потом Петя провёл высоты CE и BD , но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92^\circ$. Найдите градусную меру угла AED .

589

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9) Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 1, а длины всех трёх высот выражаются целыми числами.

3^48

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Прямая, параллельная выделенной стороне треугольника площади 16, отсекает от него треугольник площади 9. Найдите площадь четырёхугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвёртая лежит на выделенной стороне.

17

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный её основаниям, равным 7 и 17, делит трапецию на две части равной площади. Найдите длину этого отрезка.

11

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Окружность касается сторон угла в точках A и B . Расстояние от лежащей на окружности точки C до прямой AB равно 6. Найдите сумму расстояний от точки C до сторон угла, если известно, что одно из этих расстояний в 9 раз меньше другого.

20

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC .

3^48 cos 18

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A , к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

7/6

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Угол между биссектрисами равен 60° . Длина стороны AB равна 3. Найдите площадь треугольника A_1B_1O .

3^48

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O , при этом $\angle AOB = 75^\circ$, $AB = 3$. Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника ABE окружностью, где E — точка пересечения прямых AD и BC .

16π

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $2/\sqrt{5}$. Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

2/5 или 11/40

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Окружность радиуса 1 проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = \sqrt{3}$, $MK = 1$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 5 от точки C .

9^9

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. На стороне AC как на диаметре построена окружность. Из вершины B проведена касательная к окружности, отличная от BC , и D — точка касания. Точка H является основанием перпендикуляра, проведённого из точки D на сторону AC . Найдите отношение $DH : EH$, где E — точка пересечения DH и AB .

2

18. («Ломоносов», 2014, 8) В равнобедренном треугольнике ABC каждый из углов содержит нецелое число градусов. Известно, что через одну из вершин треугольника ABC можно провести прямолинейный разрез, разбивающий данный треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC .

180/7, 540/7 и 540/7 градусов

19. («Ломоносов», 2014, 8–9) Внутри круга с диаметром AB выбрана точка C . Проведены прямые AC и BC , пересекающие окружность в точках M и N соответственно. Известно, что $AC/CM = 2014/1711$ и $BC/CN = 3422/1007$. Найдите угол ACB .

120°

20. («Ломоносов», 2014, 9) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BL . Её длина равна разности $BC - AL$. Найдите углы треугольника ABC .

100°, 40°, 40°

21. («Ломоносов», 2014, 10–11) Треугольник LOM с углом $\angle LOM = 51^\circ$ повернули на некоторый острый угол вокруг точки O . При этом точка L переходит в точку N , лежащую на стороне LM , а точка M — в такую точку K , что $OM \perp NK$. Найдите угол поворота.

34°

22. («Ломоносов», 2014, 10–11) Точка O является точкой пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Найдите OA , если $BC = 6$ и $\sin \angle A = 12/13$.

5/2

23. («Ломоносов», 2014, 10–11) Трапеция $ABCD$ с основанием $AD = 4$ вписана в окружность. Касательная к окружности в точке A пересекает прямые BD и CD в точках M и N соответственно. Найдите AN , если $AB \perp MD$ и $AN = 8$.

2

24. (ОММО, 2014) В треугольнике ABC длина стороны AB равна 2, угол A равен 60° , угол B равен 70° . На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите угол DBC .

40°

25. (ОММО, 2014) Точки M, N, P, K — соответственно середины сторон BC, CD, DA и AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке E , а отрезки AN и CP — в точке F . Найдите площадь четырехугольника $ECFA$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 48.

91

26. (ОММО, 2014) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK , если $AE = 7$.

7/7

27. (ОММО, 2014) Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30° . Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

ε^

28. («Физтех», 2014, 7–8) На плоскости отмечено пять точек: A, B, C, D и E . Известно, что $AB = 21, BC = 52, CD = 152, DE = 33$ и $EA = 46$. Какое наименьшее расстояние может быть между точками C и E ?

611

29. («Физтех», 2014, 8–10) Длины сторон треугольника ABC равны 13, 22 и 27. AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы, а AA_2, BB_2 и CC_2 — его высоты. Найдите длину замкнутой ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$.

79

30. («Физтех», 2014, 9) В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM к боковой стороне. Найдите квадрат радиуса окружности, описанной около треугольника ABC , если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABM и AMC , равны соответственно 33 и 11.

96ε

31. («Физтех», 2014, 9–10) Какая наибольшая площадь может быть у треугольника, если длины двух его медиан равны 12 и 17, а угол между ними равен 150° ?

89

32. («Физтех», 2014, 9–10) Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 6$ и $AD = 7$ вписана в окружность. Продолжение средней линии MN трапеции за точку M пересекает окружность в точке K . Найдите квадрат высоты трапеции, если $MK = 1$.

29'75

33. («Физтех», 2014, 10–11) В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Через точку D , лежащую на стороне AB , проведена касательная к окружности, пересекающая прямую AC за точкой C в точке E . Найдите длину боковой стороны треугольника ABC , если $AC = 21, CE = 35$ и $BD = AB/8$.

144

34. («Физтех», 2014, 10–11) На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной 12 отмечены точки E и F соответственно. Угол ECF равен 60° . Из вершин B и D проведены перпендикуляры к отрезкам CE и CF . Какая наибольшая площадь может быть у четырёхугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров?

54

35. («Физтех», 2014, 11) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD , касается отрезков BC , CD и AD в точках M , N и K соответственно. Известно, что $BM = 3$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω . Найдите угол COD , площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω .

90, 26, 06
 $\frac{6}{\sqrt{13}}$

36. («Физтех», 2014, 11) Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{37}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 6, описанная вокруг треугольника BCK , касается отрезка AD и прямой AB . Найдите длину отрезка AB , угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

2, 2 arcs 3 = $\pi - \arccos \frac{5}{4}$, $\frac{5}{192}$

37. («Высшая проба», 2014, 7) В прямоугольном треугольнике произведение высот в два раза меньше произведения сторон. Найдите наименьший угол этого треугольника.

45°

38. («Высшая проба», 2014, 7) На стороне BC неравнобедренного треугольника ABC выбрали точку D . Оказалось, что каждый из треугольников ABD и ACD — равнобедренный, а один из них ещё и прямоугольный. Найдите величину наименьшего из углов треугольника ABC .

22,5°

39. («Высшая проба», 2014, 8) Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках K и L , сторону BC — в точках M и N , сторону CA — в точках R и S . Известно, что $KL = MN = RS = 6$, $AB = 12$, $BC = 16$, $\angle B = 90^\circ$. Найдите радиус окружности.

5

40. («Высшая проба», 2014, 8) На плоскости нарисованы прямоугольник со сторонами 1 и 2 и квадрат со стороной $\sqrt{2}$. Чему равна наибольшая возможная площадь пересечения квадрата и прямоугольника?

3/2

41. («Высшая проба», 2014, 8) Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , точка O — центр описанной окружности треугольника BHC . Известно, что точка I лежит на отрезке OA . Найдите угол BAC .

09

42. («Высшая проба», 2014, 9) В треугольнике две стороны равны 25 и 23. Каким может быть наименьший радиус описанной окружности такого треугольника?

25/2

43. («Высшая проба», 2014, 9) Точка B является серединой отрезка AC . Квадрат $ABDE$ и равносторонний треугольник BCF расположены в одной полуплоскости от прямой AC . Найти величину острого угла между прямыми CD и AF .

75

44. («Высшая проба», 2014, 9) Прямые, содержащие высоты неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , точка O — центр описанной окружности треугольника BHC . Известно, что точка I лежит на отрезке OA . Найдите угол BAC .

09

45. («Высшая проба», 2014, 10) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Прямая AO пересекает сторону BC в точке P . Точки E и F на сторонах AB и AC соответственно выбираются так, что около четырёхугольника $AEPF$ можно описать окружность. Докажите, что длина проекции отрезка EF на сторону BC не зависит от выбора точек E и F .

46. (ММО, 2014, 8) В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD . Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM , а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD . Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD .

47. (ММО, 2014, 10) Дан треугольник ABC . Обозначим через M середину стороны AC , а через P — середину отрезка CM . Описанная окружность треугольника ABP пересекает отрезок BC во внутренней точке Q . Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

48. (ММО, 2014, 11) На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

49. (Всеросс., 2014, I этап, 7) На часах половина девятого. Чему равен угол между часовой и минутной стрелками?

75

50. (Всеросс., 2014, I этап, 8–11) Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



3 : 5

51. (Всеросс., 2014, II этап, 8) В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN , а из вершины D — высоты DP и DQ . Докажите, что точки M , N , P и Q являются вершинами прямоугольника.

52. (Всеросс., 2014, II этап, 8) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

052

53. (Всеросс., 2014, II этап, 9) В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O , которая касается стороны AB в точке E . На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = \frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

54. (Всеросс., 2014, II этап, 9) Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Окружность, описанная вокруг треугольника ABH , пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG , если $DE = 5$.

01

55. (Всеросс., 2014, II этап, 10) Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE . Найдите угол CEF .

057

56. (Всеросс., 2014, II этап, 10) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K , а на стороне AC — точка M . Отрезки BM и CK пересекаются в точке P . Оказалось, что углы APB , BPC и CPA равны по 120° , а площадь четырёхугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC . Найдите угол BAC .

09

57. (Всеросс., 2014, II этап, 11) В треугольнике ABC угол C равен 75° , а угол B равен 60° . Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC . Найдите угол MAC .

08

58. (Всеросс., 2014, III этап, 9) В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC , DBC , ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

59. (Всеросс., 2014, III этап, 9, 11) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?

06

60. (Всеросс., 2014, III этап, 10) На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2 . Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 , а на стороне AC — точки B_1 и B_2 . Оказалось, что отрезки A_1B_2 , B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен 60° . Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{CA} = \frac{C_1C_2}{AB}.$$

61. (Всеросс., 2014, III этап, 10) Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O . Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что точки A , S и P лежат на одной прямой.
62. (Всеросс., 2014, III этап, 11) Дан выпуклый 7-угольник. Выбираются четыре произвольных его угла и вычисляются их синусы, от остальных трёх углов вычисляются косинусы. Оказалось, что сумма таких семи чисел не зависит от изначального выбора четырёх углов. Докажите, что у этого 7-угольника найдутся четыре равных угла.
63. (Всеросс., 2014, заключит. этап, 9) Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC . Касательные к Ω , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Отрезки BP и AC пересекаются в точке S . Пусть AD — высота треугольника ABP . Окружность ω , описанная около треугольника CSD , пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.
64. (Всеросс., 2014, заключит. этап, 9) Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω . Окружность ω проходит через точки C , D и пересекает отрезки CA , CB в точках A_1 , B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A , B , A_2 и B_2 лежат на одной окружности.
65. (Всеросс., 2014, заключит. этап, 10, 11) Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр невписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .
66. (Всеросс., 2014, заключит. этап, 10) Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ , пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BSP , пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.