Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — это ещё один вид числовой последовательности. Общее понятие последовательности мы обсудили в предыдущей статье «Арифметическая прогрессия».

Определение. Геометрическая прогрессия — это последовательность, первый член которой не равен нулю, а каждый последующий член равен произведению предыдущего члена на некоторое фиксированное ненулевое число (называемое знаменателем геометрической прогрессии).

Например, последовательность $2, 6, 18, 54, \ldots$ является геометрической прогрессией с первым членом 2 и знаменателем 3. Последовательность $20, 10, 5, 5/2, \ldots$ является геометрической прогрессией со знаменателем $1/2$. Последовательность $1, -2, 4, -8 \ldots$ является геометрической прогрессией со знаменателем -2.

Эквивалентное определение: последовательность b_n, состоящая из ненулевых чисел, называется геометрической прогрессией, если частное b_{n+1}/b_n есть величина постоянная (не зависящая от n).

Формула n-го члена геометрической прогрессии

Геометрическая прогрессия полностью определяется первым членом и знаменателем. Выведем формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Пусть b_n — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Имеем:

$$b_{n+1} = b_n q \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В частности:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 q, \\ b_3 &= b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2, \\ b_4 &= b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3, \end{aligned}$$

и тогда ясно, что

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \tag{1}$$

Задача 1. Между числами 16 и 81 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

Решение. Пусть q — знаменатель получившейся прогрессии. Число 81 будет её пятым членом, поэтому согласно формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} 81 &= 16q^4, \\ q^4 &= \frac{81}{16}, \\ q &= \pm\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеются два решения: 16, 24, 36, 54, 81 и 16, -24, 36, -54, 81.

Свойство и признак геометрической прогрессии

Свойство геометрической прогрессии. В геометрической прогрессии b_n для любого $n \geqslant 2$ выполнено равенство

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}. \tag{2}$$

Иными словами, если геометрическая прогрессия состоит из положительных чисел, то каждый её член (кроме первого) равен среднему геометрическому соседних членов: $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$.

Доказательство. Имеем:

$$b_{n-1}b_{n+1} = \frac{b_n}{q} \cdot b_n q = b_n^2,$$

что и требовалось.

Более общим образом, для геометрической прогрессии b_n справедливо равенство

$$b_n^2 = b_{n-k}b_{n+k}$$

при любом $n \geqslant 2$ и любом натуральном $k < n$. Докажите эту формулу самостоятельно — тем же самым приёмом, что и формулу (2).

Формула (2) служит не только необходимым, но и достаточным условием того, что последовательность является геометрической прогрессией.

Признак геометрической прогрессии. Если для всех $n \geqslant 2$ выполнено равенство (2), то последовательность b_n является геометрической прогрессией.

Доказательство. Перепишем формулу (2) следующим образом:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Отсюда видно, что частное b_{n+1}/b_n не зависит от n, а это как раз и означает, что последовательность b_n есть геометрическая прогрессия.

Сформулируем свойство и признак геометрической прогрессии в виде одного утверждения для трёх чисел.

Характеризация геометрической прогрессии. Три числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$.

Задача 2. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение. Обозначим данные числа x, y и z; они образуют геометрическую прогрессию. По условию, числа x, $y+2$, z образуют арифметическую прогрессию, а числа x, $y+2$, $z+9$ — снова геометрическую. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2(y+2) = x+z, \\ (y+2)^2 = x(z+9). \end{cases}$$

(первое и третье уравнения — характеризация геометрической прогрессии, второе уравнение — характеризация арифметической прогрессии).

Из первого и третьего уравнений получим $4y + 4 = 9x$. Выражая z из второго уравнения и подставляя в первое, получим $y^2 = 2xy + 4x - x^2$. Остаётся решить систему этих двух уравнений относительно x и y и затем найти z (сделайте это самостоятельно).

Ответ: 4, 8, 16 или $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Прежде всего нам нужно решить один технический вопрос. Именно, раскроем скобки и приведём подобные в выражении

$$(q-1)\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1\right).$$

Имеем:

$$(q-1)\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1\right)= \\ =q^n+q^{n-1}+\ldots+q^2+q-\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1\right)=q^n-1.$$

Отсюда получаем формулу:

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{3}$$

Теперь для суммы первых n членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n= \\ =b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}=b_1\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right),$$

и тогда формула (3) даёт

$$S_n=b_1\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{4}$$

Задача 3. (*МГУ, ВМК, 1994*) Найти $\underbrace{f\big(\ldots\big(f(f}_{n}(6))\big)\ldots\big)$, где $f(x)=\frac{x}{5}+4$.

Решение. Давайте поищем $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ и т. д. в надежде отыскать закономерность.

$$f(f(x))=\frac{\frac{x}{5}+4}{5}+4=\frac{x}{5^2}+\frac{4}{5}+4;$$
$$f(f(f(x)))=\frac{\frac{x}{5}+4}{5^2}+\frac{4}{5}+4=\frac{x}{5^3}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5}+4;$$
$$f(f(f(f(x))))=\frac{\frac{x}{5}+4}{5^3}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5}+4=\frac{x}{5^4}+\frac{4}{5^3}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5}+4.$$

Теперь ясно, что

$$\underbrace{f\big(\ldots\big(f(f}_{n}(x))\big)\ldots\big)=\frac{x}{5^n}+\frac{4}{5^{n-1}}+\frac{4}{5^{n-2}}+\ldots+\frac{4}{5}+4=\frac{x}{5^n}+4\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобках найдём по формуле (3):

$$1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}=\frac{\frac{1}{5^n}-1}{\frac{1}{5}-1}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right).$$

Тогда

$$\underbrace{f\big(\ldots\big(f(f}_{n}(6))\big)\ldots\big)=\frac{6}{5^n}+5\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=5+\frac{1}{5^n}.$$

Ответ: $5+\frac{1}{5^n}$.

Сумма убывающей геометрической прогрессии

Мы будем называть геометрическую прогрессию *убывающей*, если её знаменатель по модулю меньше единицы. Оказывается, можно говорить о сумме *всех* членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Рассмотрим в качестве примера убывающую геометрическую прогрессию

$$1,\ \frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \ldots,\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \ldots$$

С помощью формулы (4) найдём сумму её первых n членов:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что при увеличении числа слагаемых, то есть при возрастании n, правая часть (5) становится всё ближе и ближе к числу 2:

$$S_n \to 2 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Это даёт основание утверждать, что соответствующая сумма *бесконечного* числа слагаемых равна 2:

$$S_\infty = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots = 2.$$

Теперь рассмотрим общий случай: геометрическую прогрессию $b1, b_2, \ldots$ со знаменателем q, где $|q|<1$. Согласно формуле (4) имеем:

$$S_n = b_1+b_2+\ldots+b_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $n\to\infty$, то $q^n\to 0$, так что

$$S_n \to \frac{b_1}{1-q}.$$

Следовательно, сумма всех членов нашей прогрессии равна

$$S_\infty = b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots = \frac{b_1}{1-q}. \tag{6}$$

Задача 4. Периодическую десятичную дробь 1,2(3) представить в виде обыкновенной дроби.

Решение. Обозначим данное число через x. Имеем:

$$x = 1{,}2333\ldots = 1{,}2+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\ldots$$

Слагаемые начиная со второго образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию с первым членом 0,03 и знаменателем 0,1. Согласно формуле (6) имеем:

$$x = 1{,}2+\frac{0{,}03}{1-0{,}1} = 1{,}2+\frac{0{,}03}{0{,}9} = \frac{12}{10}+\frac{1}{30} = \frac{37}{30}.$$

Ответ: $\frac{37}{30}$.