Геометрия на ММО. 9 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 9 классе. В скобках после номера задачи указан год проведения олимпиады, а также порядковый номер задачи в соответствующем варианте (что позволяет составить некоторое представление о сложности задачи).

1. (*2017, №6*) В треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.

2. (*2016, №2*) В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

3. (*2016, №4*) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает сторону BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

4. (*2015, №4*) Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

5. (*2014, №4*) На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.)

6. (*2013, №2*) В треугольнике ABC, где угол B прямой, а угол A меньше угла C, проведена медиана BM. На стороне AC взята точка L так, что $\angle ABM = \angle MBL$. Описанная окружность треугольника BML пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что $AN = BL$.

7. (*2012, №3*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

8. (*2012, №5*) Дан треугольник ABC. Прямая l касается вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC.

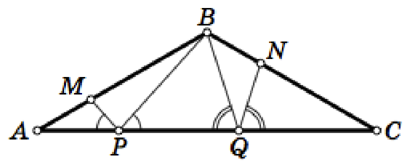
9. (*2011, №3*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен $30°$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.

10. (*2011, №5*) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K. Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

11. (*2010, №2*) На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

12. (*2009, №2*) Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2:1$.

13. (*2009, №5*) Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен $120°$. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом $60°$ друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (см. рисунок). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.



14. (*2008, №3*) Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC, что $AD = AB$. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны.

15. (*2007, №6*) Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

16. (*2006, №3*) Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены равные прямоугольники $ABMN$ и $LBCK$ так, что $AB = KC$. Докажите, что прямые AL, NK и MC пересекаются в одной точке.