Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 8 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 8 классе.

Формально Всероссийская олимпиада по математике для восьмиклассников имеет два этапа: первый (школьный) и второй (муниципальный). Роль третьего и четвёртого этапов играют соответственно региональный и заключительный этапы олимпиады им. Леонарда Эйлера.

Третий и четвёртый этапы проводятся (каждый) в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

В данном листке задачи нумеруются по принципу «Номер года. Номер этапа. Номер задачи в варианте». Например:

- задача **16.2.3** предлагалась в 2015/16 учебном году на втором (муниципальном) этапе Всероссийской олимпиады под номером 3;
- задача **16.3.8** предлагалась в том же учебном году на региональном этапе олимпиады им. Леонарда Эйлера под номером 8.

В листок включены все задачи школьных и муниципальных этапов начиная с 2012/13 учебного года, а также все задачи региональных и заключительных этапов олимпиады им. Леонарда Эйлера (начиная с самой первой олимпиады 2009 года).

17.1.5. Незнайка измерил длины сторон и диагоналей своего четырёхугольного земельного участка, записал в блокнот результаты шести измерений и тут же забыл, какие числа относились к диагоналям, а какие — к сторонам. Потом он заметил, что среди написанных чисел есть четыре одинаковых, а два оставшихся числа тоже равны между собой. Незнайка обрадовался и сделал вывод, что его участок — квадрат. Обязательно ли это так? *Если ответ «да», то утверждение нужно доказать, если ответ «нет» — привести опровергающий пример и его обосновать.*

17.2.3. Точки пересечения графиков четырех функций, заданных формулами $y = kx + b$, $y = kx - b$, $y = mx + b$ и $y = mx - b$, являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

17.2.5. В прямоугольнике $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K так, что $CK = BC$. На стороне BC отмечена точка M так, что $KM = CM$. Докажите, что $AK + BM = CM$.

16.1.5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC - AB$. Точка M — середина AD. Докажите, что угол BMC — тупой.

16.2.3. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$. Найдите угол CDB.

$\boxed{30^\circ}$

16.2.5. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC — точку A_1, а на стороне AC — точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB и MC.

16.3.3. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD. Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$.

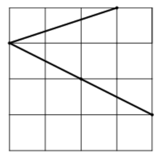
16.3.8. Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45^\circ$.

16.4.3. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку A, точка E — на продолжении BC за точку C, а точка F — на продолжении AC за точку C так, что $CF = AD$ и $AC + EF = DE$. Найдите угол BDE.

$\boxed{60^\circ}$

16.4.8. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что $LN \parallel AB$.

15.1.5. На стандартном тетрадном листе в клетку нарисован угол (см. рисунок). Найдите его величину, не используя измерительные инструменты. Ответ обоснуйте.



$\boxed{45^\circ}$

15.2.3. Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD. Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD: острым, прямым или тупым.

$\boxed{\text{Угол } BAD \text{ тупой}}$

15.2.5. В треугольнике ABC угол B равен 120°, $AB = 2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение $AD : DC$.

$\boxed{2 : 3}$

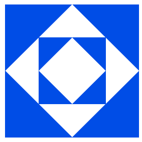
15.3.4. Серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам AB и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, пересекают стороны CD и DA в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка X такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая BX делит диагональ AC пополам.

15.3.7. В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

15.4.2. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC. На продолжении стороны BC за точку C отметили точку N так, что $2BN = AB + BC$. Пусть BS — биссектриса треугольника ABC, M — середина стороны AC, а L — такая точка на отрезке BS, что $ML \parallel AB$. Докажите, что $2LN = AC$.

15.4.8. CK — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках C, L и T подобен исходному.

14.1.2. Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



5 : 3

14.2.3. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN, а из вершины D — высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

14.2.5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30°$. Найдите $\angle AKD$.

75°

14.3.4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

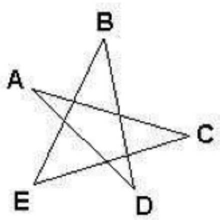
14.3.6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

14.4.2. На стороне AB треугольника ABC с углом в $100°$ при вершине C взяты точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите угол NMK.

40°

14.4.8. Диагональ выпуклого 101-угольника будем называть *главной*, если по одну сторону от неё лежит 50, а по другую — 49 вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей.

13.1.4. В пятиугольной звезде, изображённой на рисунке, $\angle ACE = \angle ADB$ и $\angle DBE = \angle BEC$. Известно также, что $BD = CE$. Докажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.



13.2.4. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE = CD$.

13.2.6. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

13.3.3. На отрезке AB отмечена точка M. Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ. Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB, а F — середина отрезка DE. Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C.

13.3.6. Дан остроугольный треугольник ABC. Высота AA_1 продолжена за вершину A на отрезок $AA_2 = BC$. Высота CC_1 продолжена за вершину C на отрезок $CC_2 = AB$. Найдите углы треугольника A_2BC_2.

$\boxed{90^\circ,\ 45^\circ,\ 45^\circ}$

13.4.3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

13.4.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

12.3.2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD прямой и $BC + CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

$\boxed{2}$

12.3.8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. На сторонах AB, BC, CD, DA взяты точки K, L, M, N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN.

12.4.1. На стороне BC треугольника ABC взята точка D таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку AD проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника ABC.

12.4.4. Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

$\boxed{\text{Да}}$

12.4.7. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $2\angle A + \angle B = \angle C$. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$.

11.3.3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB + CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.

11.3.8. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно. На медиане BM выбрана точка P, не лежащая на CN. Оказалось, что $PC = 2PN$. Докажите, что $AP = BC$.

11.4.4. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна 180°. Докажите, что $PB + PC < AD$.

11.4.6. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

10.3.3. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в её середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

$\boxed{\angle B = 54^\circ,\ \angle C = 36^\circ}$

10.3.8. Биссектрисы углов A и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов B и D — в точке Q, отличной от P. Докажите, что если отрезок PQ параллелен основанию AD, то трапеция равнобокая.

10.4.3. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM.

$\boxed{45^\circ}$

10.4.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему может быть равно отношение $AD : AB$?

$\boxed{2 : 3}$

09.3.2. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

09.3.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

09.4.3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC, равно $AD + DC$.

09.4.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.