

Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 8 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 8 классе.

Формально Всероссийская олимпиада по математике для восьмиклассников имеет два этапа: первый (школьный) и второй (муниципальный). Роль третьего и четвертого этапов играют соответственно региональный и заключительный этапы олимпиады им. Леонарда Эйлера.

Третий и четвертый этапы проводятся (каждый) в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

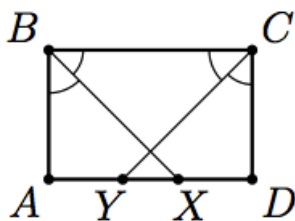
В 2017/18 году на региональном этапе (как олимпиады Эйлера, так и Всероссийской олимпиады) предлагалось по пять задач в каждый из двух дней. Соответственно, задачи первого дня регионального этапа имеют номера с 1 по 5, второго — с 6 по 10. Заключительный этап (как олимпиады Эйлера, так и Всероссийской олимпиады) проводился по старой схеме: по четыре задачи в каждый из двух дней.

В данном листке задачи нумеруются по принципу «Номер года. Номер этапа. Номер задачи в варианте». Например:

- задача **16.2.3** предлагалась в 2015/16 учебном году на втором (муниципальном) этапе Всероссийской олимпиады под номером 3;
- задача **16.3.8** предлагалась в том же учебном году на региональном этапе олимпиады им. Леонарда Эйлера под номером 8.

В листок включены все задачи школьных и муниципальных этапов начиная с 2012/13 учебного года, а также все задачи региональных и заключительных этапов олимпиады им. Леонарда Эйлера (начиная с самой первой олимпиады 2009 года).

18.1.2. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 6, сторона BC равна 11. Из вершин B и C проведены биссектрисы углов, пересекающие сторону AD в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка XY .



1

18.1.6. В треугольнике ABC провели медиану AM . Найдите угол AMC , если углы BAC и BCA равны 45° и 30° соответственно.

135°

18.2.4. В трапеции $ABCD$ точка M — середина боковой стороны CD . Лучи BD и BM делят угол ABC на три равные части. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD . Найдите углы трапеции.

 $\angle A = 72^\circ, \angle C = 54^\circ$

18.2.6. Точки M и N — середины сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ и $AB = CD$. Найдите угол между прямыми MN и BC .

◻09

18.3.4. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC . Найдите угол DME .

18.3.8. На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D . Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC + CD = AB$.

18.4.3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке K . Внутри треугольников AKD и BKC выбрали точки P и Q соответственно так, что

$$\angle KAP = \angle KDP = \angle KBQ = \angle KCQ.$$

Докажите, что прямая PQ параллельна биссектрисе угла AKD .

18.4.8. Вершина F параллелограмма $ACEF$ лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AC = AD$ и $AE = 2CD$. Докажите, что $\angle CDE = \angle BEF$.

17.1.5. Незнайка измерил длины сторон и диагоналей своего четырёхугольного земельного участка, записал в блокнот результаты шести измерений и тут же забыл, какие числа относились к диагоналям, а какие — к сторонам. Потом он заметил, что среди написанных чисел есть четыре одинаковых, а два оставшихся числа тоже равны между собой. Незнайка обрадовался и сделал вывод, что его участок — квадрат. Обязательно ли это так? Если ответ «да», то утверждение нужно доказать, если ответ «нет» — привести опровергающий пример и его обосновать.

17.2.3. Точки пересечения графиков четырех функций, заданных формулами $y = kx + b$, $y = kx - b$, $y = mx + b$ и $y = mx - b$, являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

17.2.5. В прямоугольнике $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K так, что $CK = BC$. На стороне BC отмечена точка M так, что $KM = CM$. Докажите, что $AK + BM = CM$.

17.3.3. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. На биссектрисах треугольников ABC и APQ , исходящих из вершин B и Q , выбраны точки X и Y соответственно так, что $XY \parallel BC$. Докажите, что $PX = CY$.

17.3.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектриса угла B проходит через середину стороны AD , а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD .

17.4.3 Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Известно, что $AB = BC = CD = DE = 1$. Докажите, что $AD < 2$.

17.4.6 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны 100° . На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = CY$. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC . Найдите угол AXY .

16.1.5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC - AB$. Точка M — середина AD . Докажите, что угол BMC — тупой.

16.2.3. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$. Найдите угол CDB .

008

16.2.5. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M . Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1 , на стороне BC — точку A_1 , а на стороне AC — точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA , MB и MC .

16.3.3. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD . Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$.

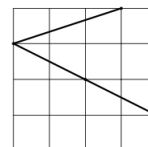
16.3.8. Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45^\circ$.

16.4.3. Дан равносторонний треугольник ABC . Точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку A , точка E — на продолжении BC за точку C , а точка F — на продолжении AC за точку C так, что $CF = AD$ и $AC + EF = DE$. Найдите угол BDE .

009

16.4.8. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K , L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N . Докажите, что $LN \parallel AB$.

15.1.5. На стандартном тетрадном листе в клетку нарисован угол (см. рисунок). Найдите его величину, не используя измерительные инструменты. Ответ обоснуйте.



45°

15.2.3. Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD . Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD : острым, прямым или тупым.

Угол BAD тупой

15.2.5. В треугольнике ABC угол B равен 120° , $AB = 2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D . Найдите отношение $AD : DC$.

2 : 3

15.3.4. Серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам AB и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, пересекают стороны CD и DA в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка X такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая BX делит диагональ AC пополам.

15.3.7. В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, угол B равен сумме углов A и D . На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

15.4.2. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC . На продолжении стороны BC за точку C отметили точку N так, что $2BN = AB + BC$. Пусть BS — биссектриса треугольника ABC , M — середина стороны AC , а L — такая точка на отрезке BS , что $ML \parallel AB$. Докажите, что $2LN = AC$.

15.4.8. CK — биссектриса треугольника ABC . На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках C , L и T подобен исходному.

14.1.2. Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



□ 3

14.2.3. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN , а из вершины D — высоты DP и DQ . Докажите, что точки M , N , P и Q являются вершинами прямоугольника.

14.2.5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

□ 75

14.3.4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K . Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

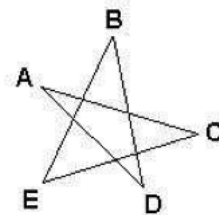
14.3.6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD . Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

14.4.2. На стороне AB треугольника ABC с углом в 100° при вершине C взяты точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M , N , K — середины отрезков AB , CP , CQ соответственно. Найдите угол NMK .

□ 40

14.4.8. Диагональ выпуклого 101-угольника будем называть *главной*, если по одну сторону от неё лежит 50, а по другую — 49 вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей.

13.1.4. В пятиугольной звезде, изображённой на рисунке, $\angle ACE = \angle ADB$ и $\angle DBE = \angle BEC$. Известно также, что $BD = CE$. Докажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.



13.2.4. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD . Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB . Докажите, что $CE = CD$.

13.2.6. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM , BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

13.3.3. На отрезке AB отмечена точка M . Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ . Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB , а F — середина отрезка DE . Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C .

13.3.6. Дан остроугольный треугольник ABC . Высота AA_1 продолжена за вершину A на отрезок $AA_2 = BC$. Высота CC_1 продолжена за вершину C на отрезок $CC_2 = AB$. Найдите углы треугольника A_2BC_2 .

90°, 45°, 45°

13.4.3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD .

13.4.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD .

12.3.2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD прямой и $BC + CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

2

12.3.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. На сторонах AB , BC , CD , DA взяты точки K , L , M , N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN .

12.4.1. На стороне BC треугольника ABC взята точка D таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку AD проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника ABC .

12.4.4. Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

еГ

12.4.7. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $2\angle A + \angle B = \angle C$. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$.

11.3.3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB + CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC . Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC .

11.3.8. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно. На медиане BM выбрана точка P , не лежащая на CN . Оказалось, что $PC = 2PN$. Докажите, что $AP = BC$.

11.4.4. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна 180° . Докажите, что $PB + PC < AD$.

11.4.6. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED .

10.3.3. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в её середине. Найдите острые углы треугольника ABC .

$$\angle B = 54^\circ, \angle C = 36^\circ$$

10.3.8. Биссектрисы углов A и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , а биссектрисы углов B и D — в точке Q , отличной от P . Докажите, что если отрезок PQ параллелен основанию AD , то трапеция равнобокая.

10.4.3. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD , а диагональ AC перпендикулярна стороне CD . На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M . Найдите угол ACM .

$$45^\circ$$

10.4.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD . Чему может быть равно отношение $AD : AB$?

$$2 : 3$$

09.3.2. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC . Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

09.3.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD , а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC . Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

09.4.3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC . Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC , равно $AD + DC$.

09.4.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.