Геометрия на ММО. 8 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 8 классе.

Принцип нумерации задач: номер **16.3** означает, что задача предлагалась в 2016 году под номером 3 (чем больше номер задачи, тем она обычно сложнее).

17.2. На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

15.2. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

13.2. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $3 : 1$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

09.2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

Один из острых углов равен 36°

18.3. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K. Точка M — середина BC, точка P — середина KM. Докажите, что если $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$, то $AK = DK$.

16.3. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60^\circ$. Докажите, что $AC = BK$.

11.3. Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

10.3. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

$1 : 2$

08.3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$.

17.4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны и $AD = BE = CF$. Докажите, что в него можно вписать окружность (то есть внутри шестиугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон).

14.4. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

12.4. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть точка K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

16.5. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол A равен $120°$, угол C равен $135°$, а угол D равен $n°$. Найдите все возможные целые значения n.

$\boxed{90}$

15.5. В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45°$, проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE.

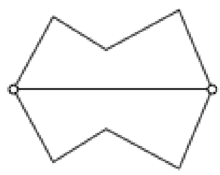
$\boxed{67{,}5°}$

13.5. Будем называть точку плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то ещё узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

11.5. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

10.5. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Точки M и N — середины сторон BC и AC соответственно. Известно, что угол AIN прямой. Докажите, что угол BIM — также прямой.

09.5. Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рисунке). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.)



18.6. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.