Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 11 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 11 классе начиная с 2008/09 учебного года (когда олимпиада приобрела свой нынешний формат в четыре этапа: школьный, муниципальный, региональный и заключительный). В листок включены:

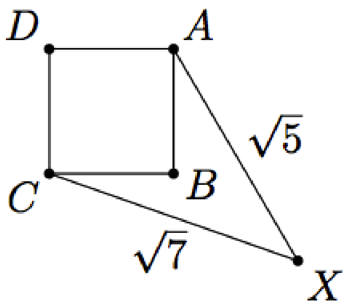
- все задачи всех этапов начиная с 2013/14 года;
- все задачи регионального и заключительного этапов 2008/09 — 2012/13 годов.

Третий этап (регион) и четвёртый этап (финал) проводятся в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

В 2017/18 году на региональном этапе предлагалось по пять задач в каждый из двух дней. Соответственно, задачи первого дня регионального этапа имеют номера с 1 по 5, второго — с 6 по 10. Заключительный этап проводился по старой схеме: по четыре задачи в каждый из двух дней.

Принцип нумерации задач листка: задача **16.3.6** предлагалась в 2015/16 учебном году на третьем (региональном) этапе под номером 6.

18.1.4. На плоскости дан квадрат $ABCD$ со стороной 1 и точка X (см. рисунок). Известно, что $XA = \sqrt{5}$, $XC = \sqrt{7}$. Чему равно XB?



$\boxed{\sqrt{6-\sqrt{10}}}$

18.1.6. Про тетраэдр $ABCD$ известно, что $AB\cdot CD = AC\cdot BD = AD\cdot BC$. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что отрезки AI_A, BI_B, CI_C, DI_D пересекаются в одной точке.

18.2.3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ ($ABCDEF$ — основание) боковое ребро равно a, плоский угол при вершине S равен 10°. Муравей ползёт по поверхности пирамиды из вершины A, стремится побывать на всех боковых рёбрах (возможно в вершинах) и вернуться в точку A. Какова длина его кратчайшего пути?

$\boxed{a}$

18.2.5. В выпуклом пятиугольнике $PQRST$ угол PRT в два раза меньше, чем угол QRS, а все стороны равны. Найдите угол PRT.

$\boxed{30^\circ}$

18.3.1. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили её со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведённых отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1?

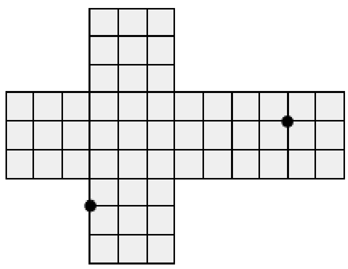
18.3.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности Γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC.

18.3.10. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере.

18.4.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.

18.4.6. Три диагонали правильной n-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке O. Докажите, что точка O — центр призмы. (Диагональ призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.)

17.1.3. Рубик сделал развёртку куба размером $3\times3\times3$ и отметил на ней две точки (см. рисунок). Каково будет расстояние между этими точками после того, как Рубик склеит из развёртки куб?



$\boxed{2\sqrt{3}}$

17.1.5. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника площади S проведены перпендикуляры к двум другим сторонам. Найдите площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами.

$\boxed{S/2}$

17.2.3. Правильный пятиугольник и правильный двадцатиугольник вписаны в одну и ту же окружность. Что больше: сумма квадратов длин всех сторон пятиугольника или сумма квадратов длин всех сторон двадцатиугольника?

17.2.4. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с плоскими прямыми углами при вершине D, в которой $CD = AD + DB$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине C равна 90°.

17.3.4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр O треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

17.3.6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причём точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90°$. Описанная окружность ω треугольника PHD вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$.

17.4.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$ вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.

17.4.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры окружностей ω_A, ω_B, ω_C и ω_D, вписанных в треугольники DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180°$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180°$.

16.1.5. Петя на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметил точку X, делящую ребро AB в отношении $1 : 2$, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на рёбрах CC_1 и A_1D_1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Пример обоснуйте.

16.2.3. В квадрате $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Что больше: площадь треугольника AGF или площадь четырёхугольника $GECF$?

Площадь треугольника больше

16.2.5. Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

Нет

16.3.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

16.3.6. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зелёного. Каждую точку касания красной и зелёной сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

1008^2

16.4.2. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

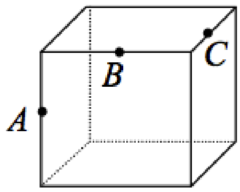
16.4.4. В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями

$$x \pm y \pm z = n$$

(при всех целых n). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) с рациональными координатами не лежит ни в одной проведённой плоскости. Докажите, что найдётся натуральное k, при котором точка (kx_0, ky_0, kz_0) лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения.

16.4.8. В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку.

15.1.4. Дан куб. Точки A, B, C — середины его рёбер (см. рисунок). Чему равен угол ABC?



$\boxed{120°}$

15.2.3. Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = AC = AD = BC$, а суммы плоских углов при каждой из вершин B и C равны по $150°$?

$\boxed{\text{Нет}}$

15.2.5. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность ω в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность ω в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника DEF.

15.3.3. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

15.3.6. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

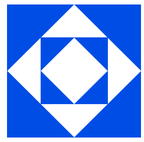
$\boxed{\text{Да}}$

15.4.1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90°$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

$\boxed{60°}$

15.4.7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

14.1.2. Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



$\boxed{5:3}$

14.1.6. В четырёхугольнике диагонали перпендикулярны. В него можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Можно ли утверждать, что это квадрат?

$\boxed{\text{Нет}}$

14.2.2. В треугольнике ABC угол C равен 75°, а угол B равен 60°. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

$\boxed{30^\circ}$

14.2.5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно 1. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат рёбра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

14.3.4. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. (Здесь через $\angle(PQR, PQS)$ обозначается двугранный угол при ребре PQ в тетраэдре $PQRS$.) Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

14.3.6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

14.4.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

14.4.6. Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин рёбер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

13.3.4. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z лежат по одну сторону от прямой t и касаются её в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

13.3.6. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно, а M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

13.4.2. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.

13.4.8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ, касаются.

12.3.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

12.3.8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ.$$

12.4.4. Дана пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.

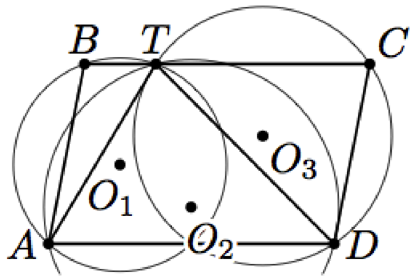
12.4.6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.3.3. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в такой точке M, что $AM : MD = 2$. Пусть O — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

11.3.6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

11.3.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

11.4.2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно (см. рисунок).



Докажите, что ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.

11.4.4. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

11.4.8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

10.3.1. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более чем на $\sqrt{2}$?

10.3.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC. Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P. Докажите, что угол KPM — прямой.

10.3.5. Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

10.3.6. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

10.4.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырёхугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно. Докажите, что прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке.

10.4.6. Могут ли четыре центра вписанных в грани тетраэдра окружностей лежать в одной плоскости?

09.3.4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O — точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

09.3.6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

09.4.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD.

09.4.7. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.