Геометрия на ММО. 11 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 11 классе. В скобках после номера задачи указан год проведения олимпиады, а также порядковый номер задачи в соответствующем варианте (что позволяет составить некоторое представление о сложности задачи).

1. (*2017, №2*) На вписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC в точке S, нашлась такая точка Q, что середины отрезков AQ и QC также лежат на вписанной окружности. Докажите, что QS — биссектриса угла AQC.

2. (*2016, №3*) Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырёхугольники $AMND$ и $BMNC$ — вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.

3. (*2016, №3*) Можно ли отметить k вершин правильного 14-угольника так, что каждый четырёхугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$; б) $k \geqslant 7$?

4. (*2016, №5*) Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя её точками было:

а) меньше $4/5$;

б) меньше $4/7$?

Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

5. (*2015, №3*) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

6. (*2015, №6*) Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

7. (*2014, №3*) На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

8. (*2014, №5*) Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.