Геометрия на ММО. 11 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 11 классе.

Принцип нумерации задач: номер **16.3** означает, что задача предлагалась в 2016 году под номером 3 (чем больше номер задачи, тем она обычно сложнее).

17.2. На вписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC в точке S, нашлась такая точка Q, что середины отрезков AQ и QC также лежат на вписанной окружности. Докажите, что QS — биссектриса угла AQC.

10.2. В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

09.2 Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрёл форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

16.3. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырёхугольники $AMND$ и $BMNC$ — вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.

16.3. Можно ли отметить k вершин правильного 14-угольника так, что каждый четырёхугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$; б) $k \geqslant 7$?

15.3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

14.3. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

13.3. Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

12.3. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, то $AH + BH \geqslant 2R$.

11.3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

11.3. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle BOC = 90°$. Найдите отношение $AC : OC$.

18.4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность, описанная вокруг треугольника A_1BC_1, проходит через точку M пересечения медиан. Найдите все возможные значения величины угла B.

17.4. Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120°$. Вне треугольника ABC взята такая точка E, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60°$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC. Докажите, что $\angle AFD = 90°$, где F — середина отрезка BE.

12.4. После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади S. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна S_1. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна S. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

09.4 Через каждую вершину четырёхугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырёхугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвёртая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырёхугольника, если один из них равен $72°$?

18.5. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.

18.5. Женя красила шарообразное яйцо последовательно в пяти красках, погружая его в стакан с очередной краской так, чтобы окрашивалась ровно половина площади поверхности яйца (полсферы). В результате яйцо окрасилось полностью. Докажите, что одна из красок была лишней, то есть если бы Женя не использовала эту краску, а в другие краски погружала бы яйцо так же, то оно всё равно окрасилось бы полностью.

16.5. Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя её точками было:

а) меньше $4/5$;

б) меньше $4/7$?

Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

14.5. Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

11.5. Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции?

11.5 По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остаётся только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определённом направлении, причём так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.

10.5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PBA = \angle PCD = 90°$. Точка M — середина стороны AD, причём $BM = CM$. Докажите, что $\angle PAB = \angle PDC$.

15.6. Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

12.6. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S.

а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.