Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 10 класс

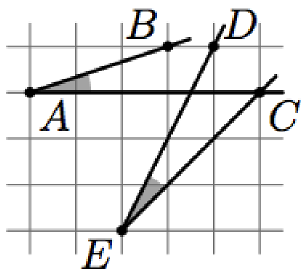
Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 10 классе.

Третий этап (региональный) и четвёртый этап (заключительный) проводятся в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

В 2017/18 году на региональном этапе предлагалось по пять задач в каждый из двух дней. Соответственно, задачи первого дня регионального этапа имеют номера с 1 по 5, второго — с 6 по 10. Заключительный этап проводился по старой схеме: по четыре задачи в каждый из двух дней.

Принцип нумерации задач листка: задача **16.3.6** предлагалась в 2015/16 учебном году на третьем (региональном) этапе под номером 6.

18.1.4. Сравните величины углов BAC и CED (см. рисунок). Свой ответ обоснуйте.



18.2.3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Оказалось, что радиусы OA и OB первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку A проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках M и N. Докажите, что $MB \perp NB$.

18.2.5. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки CX и AY пересекаются в точке T. Докажите, что площадь треугольника XBY больше площади треугольника XTY.

18.3.4. Пусть O — центр окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B, взята точка P. На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP, лежит на окружности, описанной около треугольника ABO.

18.3.7. Из четырёх одинаковых треугольников сложен выпуклый четырёхугольник. Верно ли, что у этого четырёхугольника обязательно есть параллельные стороны?

18.3.10. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30°$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60°$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$.

18.4.2. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

18.4.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

17.1.1. Точка O — центр квадрата $ABCD$. Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках A, B, C, D, O, сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

17.1.5. Две вершины, центр вписанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника лежат на одной окружности. Найдите угол при третьей вершине.

$\boxed{60^\circ}$

17.2.4. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром D и радиусом DA, которая вторично пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите AC, если $AB = c$, $AM = m$ и $AN = n$.

$\boxed{\frac{mc}{n}}$

17.2.5. Вася разобрал каркас треугольной пирамиды в кабинете математики и хочет из её шести рёбер составить два треугольника так, чтобы каждое ребро являлось стороной ровно одного треугольника. Всегда ли Вася сможет это сделать?

17.3.2. Окружность с центром I вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на описанной окружности ω треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω.

17.3.8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $DE \parallel AC$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.

17.4.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.

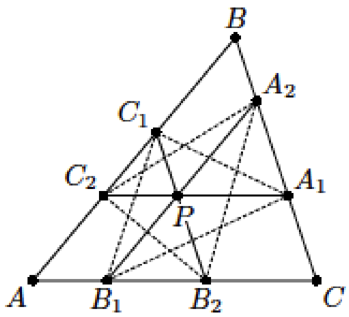
17.4.8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Точка B', симметричная точке B относительно прямой OI, лежит внутри угла ABI. Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведённые в точках B' и I, пересекаются на прямой AC.

16.1.5. Могут ли две биссектрисы треугольника разбивать его на четыре части равной площади?

$\boxed{\text{Нет}}$

16.2.3. В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O — центр описанной окружности треугольника MKN).

16.2.6. Через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.



16.3.3. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырёхугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

16.3.6. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω.

16.4.2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.

16.4.8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

15.1.6. Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M — середина стороны AB, точка K — середина стороны BC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Во сколько раз площадь четырехугольника $MBKE$ меньше площади четырехугольника $AECD$?

В 4 раза

15.2.3. В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек: A, B, C, D, E и F. Известно, что отрезки AB и DE, BC и EF, CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.

15.2.5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

$45°$

15.3.3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках P и Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ, касается стороны BC.

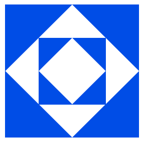
15.3.6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

15.4.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол ABC.

$\boxed{60^\circ}$

15.4.7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Окружность, описанная около треугольника PMQ, пересекает прямую BC вторично в точке X. Докажите, что $BH = CX$.

14.1.2. Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



$\boxed{5 : 3}$

14.1.6. В четырёхугольнике диагонали перпендикулярны. В него можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Можно ли утверждать, что это квадрат?

$\boxed{\text{Нет}}$

14.2.3. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

$\boxed{45^\circ}$

14.2.5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC — точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по 120°, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

$\boxed{60^\circ}$

14.3.4. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC — точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен 60°. Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{CA} = \frac{C_1C_2}{AB}.$$

14.3.6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

14.4.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

14.4.6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ, пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP, пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.

14.4.8. На плоскости дано n выпуклых попарно пересекающихся k-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих k-угольников.