

Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 10 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 10 классе.

Третий этап (региональный) и четвёртый этап (заключительный) проводятся в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

Принцип нумерации задач листка: задача **16.3.6** предлагалась в 2015/16 учебном году на третьем (региональном) этапе под номером 6.

17.1.1. Точка O — центр квадрата $ABCD$. Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках A, B, C, D, O , сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

17.1.5. Две вершины, центр вписанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника лежат на одной окружности. Найдите угол при третьей вершине.

◻09

17.2.4. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD . Проведена окружность с центром D и радиусом DA , которая вторично пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите AC , если $AB = c$, $AM = m$ и $AN = n$.

◻ $\frac{u}{5m}$

17.2.5. Вася разобрал каркас треугольной пирамиды в кабинете математики и хочет из её шести рёбер составить два треугольника так, чтобы каждое ребро являлось стороной ровно одного треугольника. Всегда ли Вася сможет это сделать?

17.3.2. Окружность с центром I вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P , а лучи AD и BC пересекаются в точке Q . Известно, что точка P лежит на описанной окружности ω треугольника AIC . Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω .

17.3.8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка D , а на стороне BC — точка E так, что $DE \parallel AC$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.

17.4.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O . Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ , параллельная прямой AC . Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.

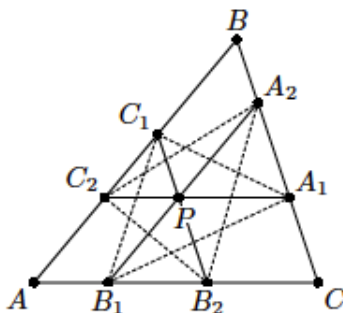
17.4.8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I . Точка B' , симметричная точке B относительно прямой OI , лежит внутри угла ABI . Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведённые в точках B' и I , пересекаются на прямой AC .

16.1.5. Могут ли две биссектрисы треугольника разбивать его на четыре части равной площади?

□

16.2.3. В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL . Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O — центр описанной окружности треугольника MKN).

16.2.6. Через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.



16.3.3. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырёхугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

16.3.6. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I , касающаяся отрезков AB , CD и DA . Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает сторону AB в точке E . Докажите, что прямая CE касается окружности ω .

16.4.2. Диагонали AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD , параллельна прямой AD .

16.4.8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB . В окружности ω , описанной около треугольника ABC , проведён диаметр CC' . Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC' , проведённый через точку K , перпендикуляр к прямой BC' , проведённый через точку L , и прямая AB образуют треугольник Δ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ , касается окружности Ω .

15.1.6. Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M — середина стороны AB , точка K — середина стороны BC . Отрезки AK и CM пересекаются в точке E . Во сколько раз площадь четырёхугольника $MВКЕ$ меньше площади четырёхугольника $AECD$?

□ 4 раза

15.2.3. В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек: A , B , C , D , E и F . Известно, что отрезки AB и DE , BC и EF , CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.

15.2.5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC . Найдите угол ABC .

45°

15.3.3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точках P и Q . Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ , касается стороны BC .

15.3.6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB , пересекает вторично сторону BC в точке L . Докажите, что $CB + CL = AB$.

15.4.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω , описанной около треугольника ABC , так, что касательные к ω в этих точках проходят через D ; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол ABC .

09°

15.4.7. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH . На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Окружность, описанная около треугольника PMQ , пересекает прямую BC вторично в точке X . Докажите, что $BH = CX$.

14.1.2. Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



5 : 3

14.1.6. В четырёхугольнике диагонали перпендикулярны. В него можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Можно ли утверждать, что это квадрат?

Нет

14.2.3. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE . Найдите угол CEF .

45°

14.2.5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K , а на стороне AC — точка M . Отрезки BM и CK пересекаются в точке P . Оказалось, что углы APB , BPC и CPA равны по 120° , а площадь четырёхугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC . Найдите угол BAC .

09°

14.3.4. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2 . Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 , а на стороне AC — точки B_1 и B_2 . Оказалось, что отрезки A_1B_2 , B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен 60° . Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{CA} = \frac{C_1C_2}{AB}.$$

14.3.6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O . Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что точки A , S и P лежат на одной прямой.

14.4.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .

14.4.6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ , пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP , пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.

14.4.8. На плоскости дано n выпуклых попарно пересекающихся k -угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих k -угольников.