Геометрия на ММО. 10 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 10 классе.

Принцип нумерации задач: номер **17.3** означает, что задача предлагалась в 2017 году под номером 3 (чем больше номер задачи, тем она обычно сложнее).

16.2. Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка C, что треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 — правильные. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

10.2 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Найдите MN, если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

17.3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AOC вторично пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Оказалось, что прямая EF делит площадь треугольника ABC пополам. Найдите угол B.

14.3. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

13.3. Дан правильный $4n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{4n}$ площади S, причём $n > 1$. Найдите площадь четырёхугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

12.3. Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны?

11.3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника.

09.3 Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

16.5. В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?

15.5. Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим точку их пересечения через P. Высота, проведённая из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

12.5. Дан остроугольный треугольник ABC. Для произвольной прямой ℓ обозначим через ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, а через I_ℓ — центр вписанной окружности треугольника, образованного этими прямыми. Найдите геометрическое место точек I_ℓ.

09.5 Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C.

13.6. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.