Функциональные уравнения и неравенства

1. (*ММО, 2006, окружной тур, 11*) Найдите все такие функции $f(x)$, что

$$f(2x+1) = 4x^2 + 14x + 7.$$

$\boxed{f(x) = x^2 + 5x + 1}$

2. (*Problems.ru, №35379*) Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех действительных x и удовлетворяющие уравнению

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

$\boxed{f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3}}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) Найдите функцию $f(x)$, о которой известно, что

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + 3 & \text{при } x \neq 2, \\ 0 & \text{при } x = 2. \end{cases}$$

$\boxed{f(x) = \frac{3(x+1)(2-x)}{2(x^2+x+1)}}$

4. (*ММО, 1991, 10.1*) Функция $f(x)$ при каждом значении $x \in (-\infty, +\infty)$ удовлетворяет равенству

$$f(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot f(1-x) = 1.$$

а) Найдите $f(0)$ и $f(1)$.
б) Найдите все такие функции $f(x)$.

$\boxed{\text{а) } f(0) = 2,\ f(1) = -2;\ \text{б) } f(x) = \frac{2}{1-2x} \text{ при } x \neq \frac{1}{2} \text{ и } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$

5. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 10.5*) Существует ли функция $f(x)$, определённая при всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2\,?$$

6. (*Всеросс., 1994, ОЭ, 11.6*) Функция $f(x)$ определена и удовлетворяет соотношению

$$(x-1) \cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$

при всех $x \neq 1$. Найдите все такие функции.

7. (*Всеросс., 2018, РЭ, 11.7*) Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная?

8. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 11.8*) Для каких α существует функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)\ ?$$

9. (*Всеросс., 2000, финал, 11.1*) Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geqslant 3f(x+2y+3z).$$

10. (*Всеросс., 2005, финал, 11.5*) Существует ли ограниченная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(1) > 0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y \in \mathbb{R}$ неравенству

$$f^2(x+y) \geqslant f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)\ ?$$

11. (*Всеросс., 1993, финал, 11.3*) Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех положительных x, принимающие положительные значения и удовлетворяющие при любых положительных x и y равенству $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$.

Периодичность

12. (*«Высшая проба», 2016, 10–11*) Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x, является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10-x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

13. (*ОММО, 2014*) Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0{,}5f(x-\pi) = \sin x.$$

$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}\sin x}$

Функциональное уравнение Коши

Задача 11 показывает, что финалисту Всероссийской олимпиады желательно быть знакомым с теорией *функционального уравнения Коши*:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Функцию, являющуюся решением уравнения Коши, будем называть *аддитивной*. Функцию $f(x) = ax$ $(a, x \in \mathbb{R})$ будем называть *линейной*. Легко проверить, что линейная функция является аддитивной. Возникает вопрос: при каких условиях, наоборот, аддитивная функция является линейной?

При отсутствии оговорок функция считается заданной на $\mathbb{R}$. Фигурирует также обозначение $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$.

14. Докажите, что функция, аддитивная на $\mathbb{Q}$ (множестве рациональных чисел), является линейной на $\mathbb{Q}$.

15. Докажите, что если аддитивная функция непрерывна на $\mathbb{R}$, то она линейна.

16. Докажите, что если аддитивная функция монотонна на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, то она линейна.

17. Докажите, что если аддитивная функция $f(x)$ принимает положительные значения для всех $x > 0$, то она линейна.

18. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

19. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

20. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Основные методы решения функциональных уравнений

Ниже предлагается перевод заметки Basic Methods For Solving Functional Equations.

- *Подстановка конкретных значений переменных.* Чаще всего в качестве первой попытки можно подставить константы (например, 0 или 1), после чего (если возможно) использовать *подстановку выражений*, которые могут превратить какую-либо часть уравнения в константу. Например, если в уравнении присутствует $f(x + y)$ и мы нашли $f(0)$, то подставляем $y = -x$. В более трудных задачах подстановки будут менее очевидными.

- *Математическая индукция.* С помощью этого метода, зная $f(1)$, находим $f(n)$ для любого целого n. Затем находим $f\left(\frac{1}{n}\right)$ и $f(r)$ для рациональных r. Данный подход применяется в ситуациях, когда функции определены на $\mathbb{Q}$, и является очень полезным, особенно в несложных задачах.

- *Исследование инъективности и сюръективности функций.* Во многих задачах установить данные факты несложно, а значение они могут иметь очень большое.

- *Нахождение неподвижных точек или нулей функций.* Количество задач, использующих данный метод, значительно меньше количества задач, в которых применяется какой-либо из трёх предыдущих подходов. Указанный метод встречается, как правило, в более сложных задачах.

- Использование *функционального уравнения Коши* и уравнений, сводящихся к уравнению Коши.

- *Исследование монотонности и непрерывности функции.* Непрерывность, как правило, даётся в качестве дополнительного условия и, так же как и монотонность, обычно используется при сведении задачи к уравнению Коши. В противном случае мы имеем дело с куда более сложной задачей.

- *Предположение, что в некоторой точке функция принимает большее или меньшее значение, чем функция, про которую мы хотим доказать, что она — решение.* Наиболее часто это используется как продолжение метода математической индукции и работает в тех задачах, где область значений функции ограничена сверху и снизу.

- *Использование рекуррентных соотношений.* Этот метод обычно используется в тех случаях, когда область значений функции ограничена, и когда мы можем найти связь между $f(f(n))$, $f(n)$ и n.

- *Исследование множества значений аргумента, при которых функция совпадает с предполагаемым решением.* Цель состоит в том, чтобы доказать, что описанное множество в точности совпадает с областью определения функции.

- *Функциональная подстановка.* Этот метод обычно используется для упрощения уравнения и редко имеет решающее значение.

- *Представление функции как суммы чётной и нечётной функций.* Именно, любая функция может быть представлена суммой чётной и нечётной функций, и это может оказаться очень удобно при рассмотрении «линейных» функциональных уравнений, содержащих много функций.

- *Использование числовых систем с основанием, отличным от 10.* Конечно, это может быть использовано только в том случае, когда область определения есть $\mathbb{N}$.

- *Очень важно угадать решение с самого начала.* Это может сильно помочь в нахождении подходящих подстановок. Также, в конце решения задачи НЕ ЗАБУДЬТЕ проверить, что найденное вами решение удовлетворяет заданным условиям.

Неподвижные точки

21. (*IMO, 1983*) Find all functions f defined on the set of positive real numbers which take positive real values and satisfy the conditions:
(i) $f(xf(y)) = yf(x)$ for all positive x, y;
(ii) $f(x) \to 0$ as $x \to +\infty$.

$\boxed{f(x) = 1/x}$

22. (*IMO, 2015*) Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers. Determine all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfy the equation

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

for all real numbers x and y.

$\boxed{f(x) = x;\ f(x) = 2 - x}$

Инъекция, сюръекция

23. (*IMO, 1992*) Let $\mathbb{R}$ denote the set of all real numbers. Find all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + (f(x))^2$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{f(x) = x}$$

24. (*Balcan MO, 2000*) Find all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f\big(xf(x) + f(y)\big) = (f(x))^2 + y$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{f(x) = x;\ f(x) = -x}$$

25. (*IMO, 2009, Shortlist*) Find all functions f from the set of real numbers into the set of real numbers which satisfy for all real x, y the identity

$$f\big(xf(x+y)\big) = f(yf(x)) + x^2.$$

$$\boxed{f(x) = x;\ f(x) = -x}$$

Сужение, продолжение

26. (*IMO, 1999*) Determine all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f\big(x - f(y)\big) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

for all real numbers x, y.

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}}$$