

## Функции в уравнениях и неравенствах. 2

Данный листок посвящён уравнениям и неравенствам с участием показательных и логарифмических функций, в которых ключевую роль играют свойства непрерывности, монотонности или выпуклости этих функций.

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 = \left(\frac{3}{4} - \log_3 \sqrt{2}\right) \cdot \log_2 49.$$

□

2. («Ломоносов», 2016) Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x - 5) - \log_{\frac{\pi}{6}}(7 - 2x)\right) \left(\cos\left(x + \frac{7}{4}\right) - \cos(2x - 1)\right) (|x - 4| - |2x - 5|) \geq 0.$$

□  $\{\pi\} \cap \left[\frac{\pi}{11}; \frac{\pi}{6}\right)$ 

3. («Курчатов», 2017, 11) Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{1 + x + x^2} = \sqrt{3}?$$

□ 9

4. («Ломоносов», 2016) Найдите произведение всех значений  $x$ , при каждом из которых

$$\left(\sqrt{4 - \sqrt{11}}\right)^{x^2 - 9x + 11}, \quad 2^{x^2 - 9x + 11}, \quad \left(\sqrt{4 + \sqrt{11}}\right)^{x^2 - 9x + 11}$$

— арифметическая прогрессия.

□ 66

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите неравенство

$$x + \sqrt{x^2 + 4} \geq \left(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}\right) \cdot 8^{x+1}.$$

□  $\left[\frac{\pi}{6}; +\infty\right)$ 

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{5-\sqrt{15}}(12 + 2x - x^2).$$

□  $\frac{91}{2} - 2$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите уравнение

$$x - \sqrt{x} \cdot 2^{-x^6} = 2^{1-2x^6}.$$

1

8. («Ломоносов», 2014) Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(x - a) > 2x^2 - x - b$$

совпадает с промежутком  $(0; 1)$ .

$\log_{2014} q = \frac{2013}{1} - b$

9. («Ломоносов», 2013) Функция  $f(t)$  с областью определения  $D(f) = [1; +\infty)$  удовлетворяет уравнению

$$f\left(\frac{4^y + 4^{-y}}{2}\right) = y$$

для любого  $y \geq 0$ . Для каждого значения  $a \neq 0$  найти все решения неравенства  $f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \leq 1$ .

$\text{Если } a < 0, \text{ то } x \in \left[-\frac{1}{26a}; -a\right]; \text{ если } a > 0, \text{ то } x \in \left[-a; -\frac{1}{26a}\right]$

10. («Ломоносов», 2012) Найдите область значений функции

$$f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3(27 - 3x) \cdot \log_3 \frac{9}{27 - 3x}}.$$

[6; 0]

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{16}} x \geq -2^{-x}.$$

[2; 0]

12. («Физтех», 2008) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y^2 - y^4 = e^x, \\ \arccos x + 2 \operatorname{arctg} y = 0. \end{cases}$$

(1; 0)

13. («Физтех», 2008) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^4 - 4x^2 + y = \ln y, \\ \arcsin x + \operatorname{arctg} y = 0. \end{cases}$$

\left(1; \frac{\sqrt{e}}{1}\right)

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11 \log_2([\log_3 x]) + 18 \log_2(\log_3[x]) = 0$$

(через  $[t]$  обозначена целая часть числа  $t$ , то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ ).

[3;4]