

# Функции в уравнениях и неравенствах. 1

## Содержание

1	Монотонность . . . . .	1
2	Симметрия, периодичность . . . . .	2
3	Задачи . . . . .	4

В данной статье рассматриваются уравнения и неравенства, при решении которых используются различные свойства функций: монотонность, симметрия графика, периодичность.

## 1 Монотонность

Монотонно возрастающая (убывающая) функция принимает каждое своё значение ровно один раз. Этот факт можно использовать следующим образом: *подбираем* корень соответствующего уравнения, а потом из соображений монотонности *доказываем*, что других корней нет.

ЗАДАЧА 1. (МГУ, ВМК, 1991) Решить уравнение

$$\sqrt{x+4} + x - 2 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Разумеется, не представляет труда решить это уравнение с помощью равносильного перехода или замены переменной. Но возможен и ещё один способ — самый простой в этой ситуации.

Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt{x+4} + x - 2$  с областью определения  $E = [-4; +\infty)$ . Заметим, что  $f(0) = 0$ , так что  $x = 0$  — корень нашего уравнения. Будучи суммой двух монотонно возрастающих функций  $y = \sqrt{x+4}$  и  $y = x - 2$ , функция  $f$  также является монотонно возрастающей на множестве  $E$ . Следовательно, ни при каких значениях  $x$ , кроме нуля, функция  $f$  в нуль не обращается. Поэтому других корней, кроме нуля, наше уравнение не имеет.

ОТВЕТ: 0.

ЗАДАЧА 2. (МГУ, биологич. ф-т, 2005) Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} < x + 4.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем данное неравенство в виде  $f(x) < 0$ , где

$$f(x) = \sqrt{2-x} + (-x - 4).$$

Областью определения функции  $f$  является множество  $E = (-\infty; 2]$ . Будучи суммой двух монотонно убывающих функций  $y = \sqrt{2-x}$  и  $y = -x - 2$ , функция  $f$  монотонно убывает на множестве  $E$ . Заметим, что  $f(-2) = 0$ ; следовательно, неравенство  $f(x) < 0$  равносильно системе

$$\begin{cases} x > -2, \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 2.$$

ОТВЕТ:  $(-2; 2]$ .

ЗАДАЧА 3. («Ломоносов», 2006) Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - 1 \leq -x|x-2| - 4x.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем наше неравенство в виде  $f(x) \leq 1$ , где

$$f(x) = \sqrt{x+1} + x|x-2| + 4x.$$

Функция  $g(x) = \sqrt{x+1}$  монотонно возрастает на своей области определения  $E = [-1; +\infty)$ . Рассмотрим функцию

$$h(x) = x|x-2| + 4x = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{если } x \leq 2; \\ x^2 + 2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Функция  $y = 6x - x^2$  монотонно возрастает при  $x \leq 3$  (и, в частности, при  $x \leq 2$ ), а функция  $y = x^2 + 2x$  монотонно возрастает при  $x \geq -1$  (и, в частности, при  $x > 2$ ); поэтому функция  $h$  монотонно возрастает на всей числовой прямой (для наглядности постройте график  $y = h(x)$ ). Значит, функция  $f(x) = g(x) + h(x)$  монотонно возрастает на множестве  $E$ . Замечая, что  $f(0) = 1$ , приходим к выводу, что наше неравенство  $f(x) \leq 1$  равносильно системе

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

ОТВЕТ:  $[-1; 0]$ .

*Замечание.* Обратите внимание, сколь существенной оказалась группировка второго и третьего слагаемого функции  $f$  с объединением их в функцию  $h$ . Рассмотрение трёх слагаемых по отдельности не привело бы к цели: первое и третье являются монотонно возрастающими функциями, однако второе ( $y = x|x-2|$ ) — нет!

## 2 Симметрия, периодичность

Перейдём к задачам, в которых существенную роль играет какая-либо симметрия графика функции или её периодичность.

ЗАДАЧА 4. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Решите уравнение  $f(\sqrt{x+4}) = f(2x)$ , где  $f(t) = 2t - t^2$  при всех действительных  $t$ .

РЕШЕНИЕ. Парабола  $y = 2t - t^2$  симметрична относительно прямой  $t = 1$ , поэтому значения этой функции в точках  $t_1$  и  $t_2$  могут совпадать в двух случаях — если эти точки или совпадают, или симметричны относительно точки  $t = 1$ :

$$f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2, \\ \frac{t_1 + t_2}{2} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем:

$$f(\sqrt{x+4}) = f(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} = 2x, \\ \sqrt{x+4} + 2x = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение полученной совокупности равносильно системе

$$\begin{cases} x+4 = 4x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{65}}{2}.$$

Второе уравнение совокупности (1) имеет корень  $x = 0$ , который является единственным, так как левая часть уравнения есть функция, монотонно возрастающая на своей области определения.

ОТВЕТ:  $0, \frac{1+\sqrt{65}}{8}$ .

ЗАДАЧА 5. (МГУ, химический ф-т, 1989) Решить уравнение

$$(2x + 1) \left( 2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3} \right) + 3x \left( 2 + \sqrt{9x^2 + 3} \right) = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение имеет вид

$$f(2x + 1) + f(3x) = 0, \quad (2)$$

где

$$f(t) = t \left( 2 + \sqrt{t^2 + 3} \right).$$

Функция  $f$  определена на всей числовой прямой и является нечётной:  $f(-t) = -f(t)$ . При  $t > 0$  функция  $f$  монотонно возрастает, будучи произведением двух монотонно возрастающих функций  $y = t$  и  $y = 2 + \sqrt{t^2 + 3}$ , принимающих только положительные значения. Ввиду своей нечётности функция  $f$  монотонно возрастает поэтому и при  $t < 0$ .

Пусть для чисел  $a$  и  $b$  выполнено равенство  $f(a) + f(b) = 0$ , то есть  $f(b) = -f(a)$ . Поскольку  $f(-a) = -f(a)$ , имеем  $f(b) = f(-a)$ , что ввиду монотонности функции  $f$  эквивалентно  $b = -a$  или  $a + b = 0$ . Таким образом, уравнение (2) равносильно уравнению

$$2x + 1 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{5}.$$

ОТВЕТ:  $-\frac{1}{5}$ .

ЗАДАЧА 6. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Пусть  $f(x)$  — периодическая функция с периодом 8, такая, что  $f(x) = 8x - x^2$  при  $x \in [0; 8]$ . Решите уравнение

$$f(2x + 16) + 23 = 5f(x). \quad (3)$$

РЕШЕНИЕ. Обе части уравнения (3) являются функциями, периодическими с периодом 8 (левая часть периодична даже с периодом 4, но это не важно). В силу указанной периодичности множество корней этого уравнения (если оно непустое) распадается на серии, в каждой из которых любые два корня отличаются на целое число, кратное 8. Значит, нам достаточно найти корни уравнения (3) на отрезке  $[0; 8]$ , после чего все корни найдутся путём прибавления к найденным значениям слагаемого  $8n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Обозначим  $t = 2x + 16$ . Имеем два различных случая расположения переменной  $x$  на рассматриваемом отрезке  $[0; 8]$ .

1. Если  $x \in E_1 = [0; 4]$ , то  $t \in [16; 24]$ , и тогда

$$f(2x + 16) = f(t) = 8(t - 16) - (t - 16)^2 = 8 \cdot 2x - (2x)^2 = 16x - 4x^2.$$

Уравнение (3) принимает вид

$$16x - 4x^2 + 23 = 5(8x - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 24x + 23 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = 23. \end{cases}$$

Множеству  $E_1$  принадлежит только  $x = 1$ .

2. Если  $x \in E_2 = [4; 8]$ , то  $t \in [24; 32]$ , и тогда

$$f(2x + 16) = f(t) = 8(t - 24) - (t - 24)^2 = 8(2x - 8) - (2x - 8)^2 = -4x^2 + 48x - 128.$$

Теперь уравнение (3) принимает вид

$$-4x^2 + 48x - 128 + 23 = 5(8x - x^2) \Leftrightarrow x^2 + 8x - 105 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x = -15. \end{cases}$$

Множеству  $E_2$  принадлежит только  $x = 7$ .

Итак, на отрезке  $[0; 8]$  уравнение (3) имеет два корня:  $x = 1$  и  $x = 7$ . Следовательно, множество всех корней данного уравнения состоит из двух серий:  $1 + 8n$  и  $7 + 8n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

ОТВЕТ:  $1 + 8n$ ,  $7 + 8n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 3 Задачи

1. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Дана функция

$$y(x) = |x - 3| + |2x - 4| + 1.$$

- 1) Найти наименьшее значение функции  $y(x)$ .
- 2) Решить неравенство  $y(x) > 8$ .

$$\left( \infty + ; \frac{8}{3} \right) \cap (0; \infty -) \quad (z; z; 1)$$

#### Монотонность

2. (МГУ, геологич. ф-т, 1995) Решить уравнение:  $\sqrt{5x - 6} + x = 4$ .

2

3. (МГУ, химический ф-т, 1996) Решить неравенство:  $\sqrt{x + 5} > 7 - x$ .

$$(\infty + ; 4)$$

4. (МГУ, биологич. ф-т, 2005) Решить неравенство:  $\sqrt{x - 1} < 3 - x$ .

$$(z; 1]$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9) Решите уравнение

$$(\sqrt{x})^{2016} + (\sqrt{1 - x})^{2016} = 1.$$

$$1; 0$$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(1 + x^2)(1 + x^4) + y(1 + y^2)(1 + y^4) = 0, \\ xy + 1000 = 0. \end{cases}$$

$$\left( \frac{01 \wedge 01}{01 \wedge 01} \right) ; \left( \frac{01 \wedge 01}{01 \wedge 01} \right)$$

7. («Ломоносов», 2014, 9) Решите уравнение

$$(x^2 - 7x) \cdot \sqrt[2013]{(x^2 - 7x)^2 + 1} + (2x + 6) \cdot \sqrt[2013]{(2x + 6)^2 + 1} = 0.$$

8:z

8. («Высшая проба», 2012, 9) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 1$$

больше  $1/8$ .

9. («Высшая проба», 2012, 10) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 2$$

больше  $1/14$ .

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3} \geq \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}.$$

(∞+;11) ∩ (z;7]

11. (МФТИ, 2004) Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{6-3\sqrt{6+x-x^2}} > \frac{1}{1+|x-1|}.$$

(z;7) ∩ (5/9;1) ∩ (1-z-]

12. (МГУ, мехмат, 2001) Решите уравнение

$$3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2\left|\sqrt{3x + 18} - 2\right|.$$

9

13. («Ломоносов», 2006) Решите неравенство

$$\sqrt{4-x} - 2 \leq x|x-3| + 4x.$$

[7;0]

14. («Ломоносов», 2011, 10–11) Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{2}{x^2}?$$

онгО

15. (ОММО, 2010) Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3 - x}$ .

I

16. (ОММО, 2010) Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = 2^{-x^3-x} - 5$ .

I-

17. (МГУ, ВМК, 2001) Функция  $f(x)$  определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2f(x^2 - 2x - 112) + |f(x^2 - 2x - 112) - 3f(-2x\sqrt{32 - 2x})|}{(3f(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112) - 2f(-2x\sqrt{32 - 2x}))^7} > 0.$$

(8:25^A - 81-)

### Симметрия, периодичность

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Решите уравнение  $f(\sqrt{x+9}) = f(3x)$ , где  $f(t) = 3t - t^2$  при всех действительных  $t$ .

$\frac{81}{25\sqrt{25+1}}$  0

19. (МГУ, химический ф-т, 1989) Решить уравнение

$$(2x + 1) \left(1 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 7}\right) + x \left(1 + \sqrt{x^2 + 7}\right) = 0.$$

$\frac{8}{1}$

20. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Пусть  $f(x)$  — периодическая функция с периодом 1, такая, что  $f(x) = x^2$  при  $x \in [0; 1)$ . Решите уравнение

$$f(2x + 5) + 2f(x) = 1.$$

$\mathbb{Z} \ni u \cdot u + \frac{8}{7} \cdot u + \frac{9}{1}$

21. (МГУ, экономич. ф-т, 1997) Функция  $f$  определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке  $0 \leq x \leq 2$  её значения вычисляются по правилу  $f(x) = 1 - |x - 1|$ . Решить уравнение

$$2f(x)f(x - 8) + 5f(x + 12) + 2 = 0.$$

$\mathbb{Z} \ni y \cdot u \cdot 4k, n, k \in \frac{2}{1}, n, k \in \frac{2}{8}$

22. (МГУ, экономич. ф-т, 1997) Функция  $f$  определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке  $-2 \leq x \leq 0$  её значения вычисляются по правилу  $f(x) = 2x(x + 2)$ . Решить уравнение

$$\frac{2f(-3-x) - 3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)} - \sqrt{2}} = 0.$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni n, n + \frac{5}{4} -}$$

23. («Ломоносов», 2014, 10–11) Дана функция  $f(x) = ||x + 2| - 4|$ . Сколько корней имеет уравнение

$$f(f(\dots f(f(x))\dots)) = 1,$$

в котором функция  $f$  берётся 2014 раз?

$$\boxed{4032}$$

24. (Всеросс., 2016, регион, 10) Найдите все такие пары различных действительных чисел  $x$  и  $y$ , что  $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$  и  $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$ .

$$\boxed{(2, 0); (0, 2)}$$