Функции в уравнениях и неравенствах. 1

Содержание

В данной статье рассматриваются уравнения и неравенства, при решении которых используются различные свойства функций: монотонность, симметрия графика, периодичность.

1 Монотонность

Монотонно возрастающая (убывающая) функция принимает каждое своё значение ровно один раз. Этот факт можно использовать следующим образом: *подбираем* корень соответствующего уравнения, а потом из соображений монотонности *доказываем*, что других корней нет.

Задача 1. (*МГУ, ВМК, 1991*) Решить уравнение

$$\sqrt{x+4}+x-2=0.$$

Решение. Разумеется, не представляет труда решить это уравнение с помощью равносильного перехода или замены переменной. Но возможен и ещё один способ — самый простой в этой ситуации.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+4}+x-2$ с областью определения $E=[-4;+\infty)$. Заметим, что $f(0)=0$, так что $x=0$ — корень нашего уравнения. Будучи суммой двух монотонно возрастающих функций $y=\sqrt{x+4}$ и $y=x-2$, функция f также является монотонно возрастающей на множестве E. Следовательно, ни при каких значениях x, кроме нуля, функция f в нуль не обращается. Поэтому других корней, кроме нуля, наше уравнение не имеет.

Ответ: 0.

Задача 2. (*МГУ, биологич. ф-т, 2005*) Решить неравенство

$$\sqrt{2-x}<x+4.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде $f(x)<0$, где

$$f(x)=\sqrt{2-x}+(-x-4).$$

Областью определения функции f является множество $E=(-\infty;2]$. Будучи суммой двух монотонно убывающих функций $y=\sqrt{2-x}$ и $y=-x-2$, функция f монотонно убывает на множестве E. Заметим, что $f(-2)=0$; следовательно, неравенство $f(x)<0$ равносильно системе

$$\begin{cases} x>-2, \\ x\in E \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad -2<x\leqslant 2.$$

Ответ: $(-2;2]$.

Задача 3. (*«Ломоносов», 2006*) Решите неравенство

$$\sqrt{x+1}-1 \leqslant -x|x-2|-4x.$$

Решение. Запишем наше неравенство в виде $f(x) \leqslant 1$, где

$$f(x)=\sqrt{x+1}+x|x-2|+4x.$$

Функция $g(x)=\sqrt{x+1}$ монотонно возрастает на своей области определения $E=[-1;+\infty)$. Рассмотрим функцию

$$h(x)=x|x-2|+4x=\begin{cases}6x-x^2, & \text{если } x \leqslant 2;\\ x^2+2x, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Функция $y=6x-x^2$ монотонно возрастает при $x \leqslant 3$ (и, в частности, при $x \leqslant 2$), а функция $y=x^2+2x$ монотонно возрастает при $x \geqslant -1$ (и, в частности, при $x>2$); поэтому функция h монотонно возрастает на всей числовой прямой (для наглядности постройте график $y=h(x)$). Значит, функция $f(x)=g(x)+h(x)$ монотонно возрастает на множестве E. Замечая, что $f(0)=1$, приходим к выводу, что наше неравенство $f(x) \leqslant 1$ равносильно системе

$$\begin{cases}x \leqslant 0,\\ x \in E\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Ответ: $[-1;0]$.

Замечание. Обратите внимание, сколь существенной оказалась группировка второго и третьего слагаемого функции f с объединением их в функцию h. Рассмотрение трёх слагаемых по отдельности не привело бы к цели: первое и третье являются монотонно возрастающими функциями, однако второе ($y=x|x-2|$) — нет!

Задача 4. (*«Ломоносов», 2005*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

Решение. Запишем уравнение в виде $f(x)=0$, где

$$f(x)=\big||x-a|+2x\big|+4x-8|x+1|.$$

Функция f является кусочно-линейной: на каком бы промежутке мы ни снимали модули, наша функция будет иметь вид $f(x)=kx+b$.

Если $x \in E_1=(-\infty;-1]$, то наименьшее возможное значение k равно $-1-2+4+8=9$; следовательно, $k>0$ при любом $x \in E_1$, и функция f монотонно возрастает на множестве E_1. Если же $x \in E_2=(-1;+\infty)$, то наибольшее возможное значение k равно $1+2+4-8=-1$; значит, $k<0$ при всех $x \in E_2$, и функция f монотонно убывает на множестве E_2.

Таким образом, функция f достигает в точке $x=-1$ своего наибольшего значения на $\mathbb{R}$; множество значений функции f есть луч $(-\infty;c]$, где

$$c=f(-1)=\big||a+1|-2\big|-4.$$

Уравнение $f(x)=0$ не имеет решений тогда и только тогда, когда $c<0$, то есть

$$\big||a+1|-2\big|-4<0 \quad \Leftrightarrow \quad \big||a+1|-2\big|<4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -4<|a+1|-2<4 \quad \Leftrightarrow \quad -2<|a+1|<6 \quad \Leftrightarrow \quad -7<a<5.$$

Ответ: $(-7;5)$.

2 Симметрия, периодичность

Перейдём к задачам, в которых существенную роль играет какая-либо симметрия графика функции или её периодичность.

Задача 5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Решите уравнение $f\left(\sqrt{x+4}\right) = f(2x)$, где $f(t) = 2t - t^2$ при всех действительных t.

Решение. Парабола $y = 2t - t^2$ симметрична относительно прямой $t = 1$, поэтому значения этой функции в точках t_1 и t_2 могут совпадать в двух случаях — если эти точки или совпадают, или симметричны относительно точки $t = 1$:

$$f(t_1) = f(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = t_2, \\ \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 1. \end{array}\right.$$

Таким образом, имеем:

$$f\left(\sqrt{x+4}\right) = f(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} = 2x, \\ \sqrt{x+4} + 2x = 2. \end{array}\right. \tag{1}$$

Первое уравнение полученной совокупности равносильно системе

$$\begin{cases} x + 4 = 4x^2, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + \sqrt{65}}{2}\,.$$

Второе уравнение совокупности (1) имеет корень $x = 0$, который является единственным, так как левая часть уравнения есть функция, монотонно возрастающая на своей области определения.

Ответ: 0, $\frac{1+\sqrt{65}}{8}$.

Задача 6. (*МГУ, химический ф-т, 1989*) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0.$$

Решение. Данное уравнение имеет вид

$$f(2x+1) + f(3x) = 0, \tag{2}$$

где

$$f(t) = t\left(2 + \sqrt{t^2 + 3}\right).$$

Функция f определена на всей числовой прямой и является нечётной: $f(-t) = -f(t)$. При $t > 0$ функция f монотонно возрастает, будучи произведением двух монотонно возрастающих функций $y = t$ и $y = 2 + \sqrt{t^2+3}$, принимающих только положительные значения. Ввиду своей нечётности функция f монотонно возрастает поэтому и при $t < 0$.

Пусть для чисел a и b выполнено равенство $f(a) + f(b) = 0$, то есть $f(b) = -f(a)$. Поскольку $f(-a) = -f(a)$, имеем $f(b) = f(-a)$, что ввиду монотонности функции f эквивалентно $b = -a$ или $a + b = 0$. Таким образом, уравнение (2) равносильно уравнению

$$2x + 1 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{5}\,.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

Задача 7. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение

$$f(2x + 16) + 23 = 5f(x). \tag{3}$$

Решение. Обе части уравнения (3) являются функциями, периодическими с периодом 8 (левая часть периодична даже с периодом 4, но это не важно). В силу указанной периодичности множество корней этого уравнения (если оно непустое) распадается на серии, в каждой из которых любые два корня отличаются на целое число, кратное 8. Значит, нам достаточно найти корни уравнения (3) на отрезке $[0; 8]$, после чего все корни найдутся путём прибавления к найденным значениям слагаемого $8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $t = 2x + 16$. Имеем два различных случая расположения переменной x на рассматриваемом отрезке $[0; 8]$.

1. Если $x \in E_1 = [0; 4]$, то $t \in [16; 24]$, и тогда

   $$f(2x + 16) = f(t) = 8(t - 16) - (t - 16)^2 = 8 \cdot 2x - (2x)^2 = 16x - 4x^2.$$

   Уравнение (3) принимает вид

   $$16x - 4x^2 + 23 = 5(8x - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 24x + 23 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 23. \end{array}\right.$$

   Множеству E_1 принадлежит только $x = 1$.

2. Если $x \in E_2 = [4; 8]$, то $t \in [24; 32]$, и тогда

   $$f(2x + 16) = f(t) = 8(t - 24) - (t - 24)^2 = 8(2x - 8) - (2x - 8)^2 = -4x^2 + 48x - 128.$$

   Теперь уравнение (3) принимает вид

   $$-4x^2 + 48x - 128 + 23 = 5(8x - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 8x - 105 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = -15. \end{array}\right.$$

   Множеству E_2 принадлежит только $x = 7$.

Итак, на отрезке $[0; 8]$ уравнение (3) имеет два корня: $x = 1$ и $x = 7$. Следовательно, множество всех корней данного уравнения состоит из двух серий: $1 + 8n$ и $7 + 8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $1 + 8n$, $7 + 8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3 Задачи

1. (*МГУ, социологич. ф-т, 2004*) Дана функция

$$y(x) = |x - 3| + |2x - 4| + 1.$$

1) Найти наименьшее значение функции $y(x)$.
2) Решить неравенство $y(x) > 8$.

$\boxed{1)\ 2;\ 2)\ (-\infty; 0) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)}$

Монотонность

2. (*МГУ, геологич. ф-т, 1995*) Решить уравнение: $\sqrt{5x-6}+x=4$.

$\boxed{2}$

3. (*МГУ, химический ф-т, 1996*) Решить неравенство: $\sqrt{x+5}>7-x$.

$\boxed{(4;+\infty)}$

4. (*МГУ, биологич. ф-т, 2005*) Решить неравенство: $\sqrt{x-1}<3-x$.

$\boxed{[1;2)}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9*) Решите уравнение

$$\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}=1.$$

$\boxed{0;\ 1}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(1+x^2)(1+x^4)+y(1+y^2)(1+y^4)=0,\\ xy+1000=0. \end{cases}$$

$\boxed{\left(10\sqrt{10},\,-10\sqrt{10}\right);\ \left(-10\sqrt{10},\,10\sqrt{10}\right)}$

7. (*«Ломоносов», 2014, 9*) Решите уравнение

$$(x^2-7x)\cdot\sqrt[2013]{(x^2-7x)^2+1}+(2x+6)\cdot\sqrt[2013]{(2x+6)^2+1}=0.$$

$\boxed{2;\ 3}$

8. (*«Высшая проба», 2012, 9*) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-1$$

больше $1/8$.

9. (*«Высшая проба», 2012, 10*) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-2$$

больше $1/14$.

10. (*МФТИ, 2004*) Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{6-3\sqrt{6+x-x^2}}>\frac{1}{1+|x-1|}\,.$$

$\boxed{[-2;-1)\cup\left(1;\frac{6}{5}\right)\cup(2;3]}$

11. (*МГУ, мехмат, 2001*) Решите уравнение

$$3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$$

$\boxed{6}$

12. (*«Ломоносов», 2006*) Решите неравенство

$$\sqrt{4-x}-2\leqslant x|x-3|+4x.$$

$\boxed{[0;4]}$

13. (*«Ломоносов», 2005*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

$\boxed{(-7;5)}$

14. (*МГУ, ф-т психологии, 2004*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|x^2-5|x|\right|=a(x+4)$$

имеет ровно три различных решения.

$\boxed{0;\ 1}$

15. (*«Ломоносов», 2011, 10–11*) Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{2}{x^2}\ ?$$

$\boxed{\text{Одно}}$

16. (*ОММО, 2010*) Решите уравнение $f(f(x))=f(x)$, где $f(x)=\sqrt[5]{3-x^3-x}$.

$\boxed{1}$

17. (*ОММО, 2010*) Решите уравнение $f(f(x))=f(x)$, где $f(x)=2^{-x^3-x}-5$.

$\boxed{-1}$

18. (*МГУ, ВМК, 2001*) Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2f(x^2-2x-112)+\left|f(x^2-2x-112)-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\,\right)\right|}{\left(3f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\,\right)\right)^7}>0.$$

$\boxed{\left(-13-\sqrt{57};8\right)}$

Симметрия, периодичность

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Решите уравнение $f\left(\sqrt{x+9}\right) = f(3x)$, где $f(t) = 3t - t^2$ при всех действительных t.

$\boxed{0,\ \frac{1+\sqrt{325}}{18}}$

20. (*МГУ, химический ф-т, 1989*) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right) + x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right) = 0.$$

$\boxed{-\frac{1}{3}}$

21. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1, такая, что $f(x) = x^2$ при $x \in [0;1)$. Решите уравнение

$$f(2x+5) + 2f(x) = 1.$$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} + n,\ \frac{2}{3} + n,\ n \in \mathbb{Z}}$

22. (*МГУ, экономич. ф-т, 1997*) Функция f определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 1 - |x-1|$. Решить уравнение

$$2f(x)f(x-8) + 5f(x+12) + 2 = 0.$$

$\boxed{-\frac{3}{2} + 4n,\ -\frac{1}{2} + 4k,\ n, k \in \mathbb{Z}}$

23. (*МГУ, экономич. ф-т, 1997*) Функция f определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2 \leqslant x \leqslant 0$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x+2)$. Решить уравнение

$$\frac{2f(-3-x)-3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)-\sqrt{2}}} = 0.$$

$\boxed{-\frac{1}{2} + 8n,\ n \in \mathbb{Z}}$

24. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Дана функция $f(x) = \big||x+2|-4\big|$. Сколько корней имеет уравнение

$$f\left(f\left(\ldots f\left(f(x)\right)\ldots\right)\right) = 1,$$

в котором функция f берётся 2014 раз?

$\boxed{4032}$

25. (*Всеросс., 2016, регион, 10*) Найдите все такие пары различных действительных чисел x и y, что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x-y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x-y)$.

$\boxed{(2,0);\ (0,2)}$