

Формулы приведения

Прежде чем обсуждать формулы приведения, давайте договоримся о терминологии. Пусть $f(x)$ есть одна из функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$. Символом $\operatorname{cof}(x)$ обозначим кофункцию для функции $f(x)$. Кофункциями друг для друга являются синус и косинус, а также, соответственно, тангенс и котангенс. Более точно:

- если $f(x) = \sin x$, то $\operatorname{cof}(x) = \cos x$;
- если $f(x) = \cos x$, то $\operatorname{cof}(x) = \sin x$;
- если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то $\operatorname{cof}(x) = \operatorname{ctg} x$;
- если $f(x) = \operatorname{ctg} x$, то $\operatorname{cof}(x) = \operatorname{tg} x$.

Пусть n — ненулевое целое число. **Формулы приведения** — это тригонометрические тождества следующего вида:

$$f\left(\frac{n\pi}{2} \pm \alpha\right) = \begin{cases} (\pm)f(x), & \text{если } n \text{ чётное;} \\ (\pm)\operatorname{cof}(x), & \text{если } n \text{ нечётное;} \end{cases}$$

Символ (\pm) перед функцией или кофункцией означает, что в том или ином случае там может стоять как плюс, так и минус.

Точку тригонометрической окружности, отвечающую углу $n\pi/2$, мы будем называть *опорной точкой*.

Для каждой опорной точки (то есть при каждом n) получаются восемь формул приведения (четыре функции и два возможных знака перед α). Рассмотрим их в четырёх наиболее важных случаях — при $n = 1, 2, 3, 4$.

1. *Формулы приведения с опорной точкой $\pi/2$ (случай $n = 1$):*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \quad (1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha; \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha; \quad (4)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha; \quad (5)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha; \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (8)$$

Тождества для синуса и косинуса являются простым следствием формул сложения. Так, формулы дополнительного угла (1) и (2) уже были получены нами в предыдущей статье. Докажем формулу (5):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Аналогично доказывается и формула (6).

Тождества для тангенса и котангенса являются следствиями соответствующих тождеств для синуса и косинуса. Например, формула (3) получается в результате деления равенства (1) на равенство (2).

2. *Формулы приведения с опорной точкой π (случай $n = 2$):*

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \quad (9)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \quad (10)$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad (11)$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad (12)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \quad (13)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha; \quad (15)$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha. \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) показывают, что период тангенса и котангенса равен π . Этот факт уже известен нам из геометрической интерпретации тангенса и котангенса.

3. *Формулы приведения с опорной точкой $3\pi/2$ (случай $n = 3$):*

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha; \quad (17)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha; \quad (18)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha; \quad (19)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha; \quad (20)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha; \quad (21)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha; \quad (22)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad (23)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (24)$$

4. *Формулы приведения с опорной точкой 2π (случай $n = 4$):*

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha; \quad (25)$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha; \quad (26)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad (27)$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad (28)$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha; \quad (29)$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha; \quad (30)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha; \quad (31)$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha. \quad (32)$$

Формулы (29) и (30) отражают тот факт, что период синуса и косинуса равен 2π . Формулы (31) и (32) вытекают также из периодичности тангенса и котангенса с периодом π .

Любую формулу приведения можно вывести из формул сложения. Однако существует простое правило, позволяющее быстро получить нужную формулу. Оно состоит из двух шагов.

- i. Прежде всего задаём себе вопрос: «Меняется ли функция на кофункцию?» и двигаем туда-сюда головой вдоль той оси, на которой расположена опорная точка.

В случае опорных точек $\pi/2$ и $3\pi/2$ это вертикальная ось ординат, и в результате получается утвердительный кивок: «Да, меняется». Мы видим это на примере формул (1)–(8) и (17)–(24): везде функция меняется на кофункцию.

В случае опорных точек π и 2π это горизонтальная ось абсцисс, и движение головой даёт отрицательный ответ: «Нет, не меняется». Мы видим это на примере формул (9)–(16) и (25)–(32): функция в правой части равенства везде та же, что и в левой.

- ii. Теперь нужно разобраться со знаком правой части. Когда ставится плюс и когда — минус?

Всё очень просто. Берём левую часть $f\left(\frac{n\pi}{2} \pm \alpha\right)$ формулы приведения и предполагаем, что угол α острый, то есть точка α расположена в первой четверти. Определяем, в какой четверти расположен аргумент функции f и какой знак будет иметь функция f в данной четверти. Это и будет искомым знаком правой части!

Так, точка $\pi/2 - \alpha$ будет также расположена в первой четверти, где все функции положительны. Соответственно, в правых частях формул (1)–(4) стоит знак плюс.

Точка $\pi/2 + \alpha$ окажется во второй четверти, где синус положителен, а косинус, тангенс и котангенс отрицательны. Соответственно, в правой части формулы (5) стоит знак плюс, а в формулах (6)–(8) — минус.

Точка $\pi - \alpha$ расположена во второй четверти. Поэтому в формуле (9) мы видим плюс, а в формулах (10)–(12) — минус.

Точка $\pi + \alpha$ расположена в третьей четверти, где синус и косинус отрицательны, а тангенс и котангенс положительны. Соответственно, в формулах (13), (14) мы видим плюс, а в формулах (15), (16) — минус.

Продолжая рассуждать так же, вы легко разберётесь со знаками и в оставшихся формулах приведения.

Таким образом, зубрить формулы приведения нет никакой необходимости. Никто их не изустит и не помнит :-). Если вы усвоили несложное правило «мотания головой» и определения знака правой части, то любую формулу приведения восстановите с лёгкостью. Ну а в самом крайнем случае вам на помощь придут формулы сложения — их, конечно, надо знать назубок.