Целая и дробная части

1. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Существуют ли такие целые числа a и b, что
а) уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет;
б) уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет?

2. (*Турнир городов, 1990, 8–9*) Найти число решений в натуральных числах уравнения

$$\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{11}\right] + 1.$$

3. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) а) Привести пример такого положительного a, что

$$\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1.$$

б) Может ли такое a быть рациональным числом?

4. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) В ряд выписаны действительные числа a_1, a_2, a_3, ..., a_{1996}. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

5. (*ММО, 1981, 7.4, 8.4*) Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]?$$

6. (*Моск. матем. регата, 2012, 10*) Решите неравенство: $[x] \cdot \{x\} < x - 1$.

7. (*«Курчатов», 2014, 11*) Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x^2$.

8. (*ММО, 1957, 9.2*) Решите уравнение: $x^3 - [x] = 3$.

9. (*Всеросс., 1998, округ, 10.5*) Решите уравнение : $\{(x+1)^3\} = x^3$.

10. (*ММО, 1955, 8.5*) Числа $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ различны между собой, и числа $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, ..., $\left[\frac{M}{a}\right]$ тоже различны между собой. Найти все такие a.

11. (*ММО, 1969, 10.4*) Существует ли такое число x, что ни для какого натурального числа n число $[x \cdot 1969^n]$ не делится на $[x \cdot 1969^{n-1}]$?

12. (*Турнир городов, 2002, 10–11*) Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что $a > 1$, $b > 1$ и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных числах m и n?

13. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и нашёл приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он произвольно выбрал из списка два числа, сложил их, отбросил у суммы знаки после запятой (если они были) и записал результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он проделал то же самое, и так далее, пока в списке не осталось одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

14. (*Турнир городов, 1983, 9–10*) Докажите для каждого натурального числа $n > 1$ равенство:

$$\left[n^{\frac{1}{2}}\right] + \left[n^{\frac{1}{3}}\right] + \ldots + \left[n^{\frac{1}{n}}\right] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n]\,.$$

15. (*Всеросс., 2000, финал, 10.1*) Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

16. (*Всеросс., 1999, финал, 9.6*) Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n^2} \left\{\sqrt{k}\right\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}\,.$$

17. (*«Ломоносов», 2008*) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2004\left[n\sqrt{1002^2+1}\right] = n\left[2004\sqrt{1002^2+1}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x.