Формулы двойного и половинного угла

Формулы двойного угла — это формулы, выражающие тригонометрические функции угла 2α через тригонометрические функции угла α. Все формулы двойного угла выводятся из соответствующих формул сложения.

Синус двойного угла

Исходим из формулы синуса суммы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Полагаем в этой формуле $\beta=\alpha$:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha,$$

то есть

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.} \tag{1}$$

Мы получили формулу синуса двойного угла.

Косинус двойного угла

Исходим из формулы косинуса суммы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Полагаем в этой формуле $\beta=\alpha$:

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha,$$

то есть

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.} \tag{2}$$

Это — первая формула косинуса двойного угла. Имеются ещё две. Они получаются из формулы (2) с помощью основного тригонометрического тождества.

Так, согласно основному тригонометрическому тождеству имеем: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Подставляя это в (2), получим:

$$\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.} \tag{3}$$

С другой стороны, имеем также: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$. Подставляем это в (2):

$$\boxed{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.} \tag{4}$$

Как видите, в отличие от синуса двойного угла, где имеется одна-единственная формула, здесь нужно знать три формулы косинуса двойного угла (2)–(4).

Тангенс и котангенс двойного угла

Берём формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Полагаем в ней $\beta=\alpha$ и получаем формулу тангенса двойного угла:

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,.}\tag{5}$$

Точно так же из формулы котангенса суммы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

получим:

$$\boxed{\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\,.}$$

Формулы понижения степени

Мы переходим к *формулам половинного угла*, которые связывают тригонометрические функции угла α и тригонометрические функции угла $\alpha/2$. По сути это те же формулы двойного угла, только записанные несколько иным образом.

По формуле (3) косинуса двойного угла имеем:

$$\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,,$$

откуда

$$\boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\,.}\tag{6}$$

А теперь точно так же воспользуемся формулой (4):

$$\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

откуда

$$\boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\,.}\tag{7}$$

Тождества (6) и (7) называются *формулами понижения степени*. Название понятно: в левой части каждой формулы стоит квадрат тригонометрической функции, а в правой части — первая степень косинуса.

Формулы тангенса половинного угла

Взяв отношение равенств (6) и (7), получим:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\,.}$$

Данная формула, как видите, выражает квадрат тангенса половинного угла. Имеются также две формулы, выражающие сам тангенс.

Первая формула:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.}$$

Чтобы доказать это тождество, возьмём его правую часть и путём преобразований выведем из неё левую часть. Используем формулы (6) и (1).

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.$$

Вторая формула:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,.}$$

Докажите её самостоятельно, используя формулы (1) и (7).

Универсальная подстановка

Оказывается, любую тригонометрическую функцию угла α можно выразить через тангенс половинного угла $\alpha/2$.

1. Формула для синуса:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{8}$$

Доказываем «справа налево», умножая числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha.$$

2. Формула для косинуса:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{9}$$

Попробуйте доказать её самостоятельно. Приём тот же: умножаем числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Но в данном случае вместо формулы синуса двойного угла вам понадобится формула (2) косинуса двойного угла.

3. Формула для тангенса — это уже известная нам формула (5):

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{10}$$

4. Формула для котангенса — это «перевёрнутая» формула (10):

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{11}$$

Формулы (8)–(11) называются *универсальной подстановкой*.