Формулы сложения

Формулы сложения — это формулы преобразования тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{1}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \tag{2}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \tag{3}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \tag{4}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \tag{5}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \tag{6}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}; \tag{7}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}. \tag{8}$$

Давайте посмотрим, как выводятся формулы сложения. Начинаем с тождества (2) — формулы косинуса разности двух углов.

Расстояние между точками A и B на плоскости будем обозначать $\rho(A,B)$. Если (x_A, y_A) — координаты точки A и (x_B, y_B) — координаты точки B, то, как известно из геометрии,

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \tag{9}$$

На рис. 1 изображены точки α и β, расположенные на тригонометрической окружности и соединённые синим отрезком. Показана также точка $\alpha-\beta$, отвечающая разности углов α и β; она соединена с точкой 0 красным отрезком.

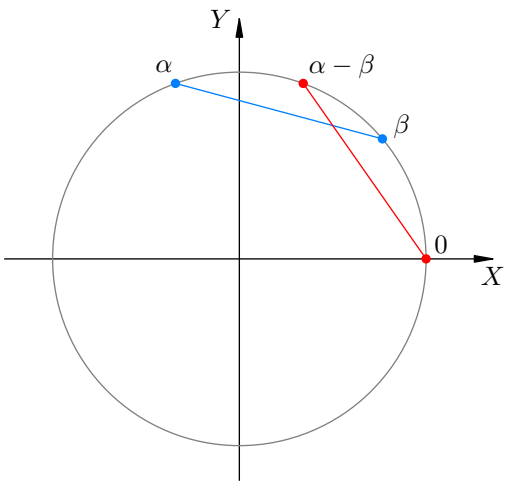

Рис. 1. К выводу формулы для косинуса разности

При повороте на угол $-\beta$ вокруг начала координат синий отрезок совмещается с красным, поэтому длины этих отрезков равны:

$$\rho(\alpha,\beta) = \rho(\alpha-\beta, 0). \tag{10}$$

Оба расстояния в этом равенстве мы найдём с помощью формулы (9). Имеем:

$$\begin{aligned}
\rho^2(\alpha,\beta) &= (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \\
&= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta); \\
\rho^2(\alpha-\beta,0) &= (x_{\alpha-\beta} - 1)^2 + (y_{\alpha-\beta} - 0)^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta) = \\
&= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}$$

Сопоставляя полученные результаты, видим, что

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Формула (2) для косинуса разности тем самым доказана. Формула (1) для косинуса суммы получается из неё немедленно:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Мы воспользовались здесь чётностью косинуса и нечётностью синуса:

$$\cos(-\beta) = \cos\beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin\beta.$$

Чтобы получить формулы (3) и (4) синуса суммы и разности, нам понадобится один промежуточный результат. По формуле косинуса разности имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Таким образом, мы получили полезную формулу косинуса дополнительного угла[1]:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha. \tag{11}$$

Заменим в формуле (11) угол α на $\pi/2 - \alpha$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

то есть

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \tag{12}$$

Это формула синуса дополнительного угла.

Теперь, располагая формулами косинуса и синуса дополнительного угла, имеем:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Формула синуса суммы тем самым доказана. Формула синуса разности получается из неё легко:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

(здесь мы снова воспользовались чётностью косинуса и нечётностью синуса).

[1] Углы α и $\pi/2 - \alpha$ называются *дополнительными* по аналогии с прямоугольным треугольником: два таких острых угла являются углами в прямоугольном треугольнике и дополняют друг друга до $90°$.

Итак, мы выяснили, откуда берутся первые четыре формулы сложения (1)–(4). Из них, в свою очередь, вытекают формулы (5)–(8).

Докажем, например, тождество (5). Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Делим числитель и знаменатель полученного равенства на $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,,$$

что и требовалось. Формула (6) получается отсюда заменой β на $-\beta$ с последующим учётом нечётности тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Формулы (7) и (8) выводятся аналогично. Сделайте это самостоятельно, чтобы лишний раз поупражняться в тригонометрических преобразованиях.

Формулы сложения позволяют получать значения тригонометрических функций новых углов исходя из уже известных значений.

Вычислим, например, $\sin 15^\circ$. Имеем:

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,.$$

Формулы сложения составляют фундамент тригонометрии. Из них выводится масса нужных формул. Наиболее важным тригонометрическим формулам будут посвящены также следующие три статьи.