

Уравнения в целых числах

Обычная постановка задачи такова: дано уравнение с двумя (или более) неизвестными, и требуется найти все его целочисленные решения. Решающую роль тут обычно играют соображения делимости.

1. Решите в целых числах уравнение:

а) $x^2 - y^2 = 31$;

б) $xy = x + y + 3$.

(3; 8) (1-; 1-) (0; 8-) (8; 0) (2; 2) (2; 2) (9; 6) (5; 15) (16; 16) (15; 15) (16; 9) (9; 16) (8; 8)

2. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n , что pn делится на $p + n$?

0170

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9*) Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение abc .

08

4. (*ОММО, 2015, 9–10*) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{13 - a}(x + y) - \sqrt{13a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

12

5. (*«Ломоносов», 2011, 10*) Решите в натуральных числах уравнение

$$a^b + b^a = 2011.$$

(2010; 1) (1; 2010)

6. Решите в целых числах уравнение:

а) $2x + 3y = 4$;

б) $4x + 5y = 1$;

в) $8x - 3y = -2$;

г) $5x - 9y = 24$.

(a) $x = 2 - 3k, y = -2k$; (б) $x = -1 - 5k, y = 1 + 2k$; (в) $x = 2 + 3k, y = 6 + 8k$; (г) $x = 12 + 9k, y = 4 + 5k, k \in \mathbb{Z}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9*) В прямоугольном треугольнике длины всех сторон являются натуральными числами, при этом один из катетов равен 2012. Найдите все такие треугольники.

(2012, 253005, 253013); (2012, 506016, 506020); (2012, 1012035, 1012037); (2012, 1509, 2515)

8. («Ломоносов», 2011, 10) Дано простое число p . Решите в натуральных числах уравнение

$$x^2 = y^2 + 2010p.$$

1006,1004,9001,338,332,206,196,82,52 при $z = d$ или $z \neq d$ не имеет решений

9. Докажите, что уравнение не имеет решений в целых числах:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x^2 - 3y = 17; & \text{б) } x^2 + 4x - 8y = 11; \\ \text{в) } 3x^2 - 4y^2 = 13; & \text{г) } 2x^2 - 5y^2 = 7. \end{array}$$

казание: а) mod 3; б) mod 8

10. («Курчатов», 2017, 8) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$(2x + y)(2y + x) = 2017^{2017} ?$$

11. (МГУ, химический ф-т, 1993) Найти все пары целых чисел m и n , удовлетворяющие уравнению

$$6m^2 - 2n^2 + mn = 3.$$

(1,1-), (1-1)

12. (МГУ, ВШБ, 2004) Найти все пары целых неотрицательных чисел (k, m) , являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

(6,6)

13. («Физтех», 2011, 9, 11) Целые числа m и n таковы, что

$$4m + 5n = mn - 9.$$

Найдите, какое наибольшее значение может принимать m .

43

14. («Ломоносов», 2012, 9) Найдите периметр выпуклого многоугольника, множество вершин которого в координатной записи совпадает с множеством целочисленных пар решений уравнения

$$x^2 + xy = x + 2y + 9.$$

16 + 12√5

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Решить в целых числах уравнение

$$x^6 = y^3 + 217.$$

(8,8), (8,8-), (9-1), (9-1-)

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Найдите все пары натуральных чисел (x, y) , для которых выполнено равенство

$$x^2 + xy = y + 92.$$

(2, 88); (4, 8)

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Найдите все пары целых чисел (x, y) для которых выполнено равенство

$$x^2 + y^2 = x + y + 2.$$

(-1, -1); (0, 0); (1, 1); (1, -1); (-1, 0); (1, 0); (1, 1); (0, 1)

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Решите в натуральных числах уравнение

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}.$$

$n = 1$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите все пары натуральных чисел x, y , удовлетворяющие уравнению

$$5xy + y - 5x = 1038.$$

(12, 18)

20. (МФТИ, 2004) Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

(6, -5); (4, 5); (-4, -3)

21. (МГУ, ИСАА, 1997) Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению

$$3xy - 14x - 17y + 71 = 0.$$

(4, 3); (6, 13); (14, 5)

22. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003) Найдите все целые решения (x, y, z) уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

$(7k, 3k, 2k), k \in \mathbb{Z}$

23. (МГУ, химический ф-т, 1997) Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

(0, 0); (2, 2); (0, 3); (3, 0)

24. (МФТИ, 1998) Найти все пары целых чисел x, y , при которых является верным равенство

$$x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0.$$

(4, 27); (2, -17); (22, 423); (-16, 307)

25. (МГУ, ВМК, 1996) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

(2, 3), (2, -3), (3, -2), (-3, -2)

26. («Физтех», 2007) Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 8xy - y^2 + 16 = 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

(1, 3), (1, -5)

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите все пары натуральных чисел x, y , удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016.$$

20 = 4, n = x

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите уравнение в целых числах:

$$\sqrt{9x^2 + 80x - 40} = 3x - 20y.$$

(-17, -13), (-17, -3), (-17, -9)

29. («Ломоносов», 2013, 9) Найдите все пары натуральных чисел (m, n) , для которых выполняется равенство

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = m(m-1).$$

(1, 1), (2, 1), (3, 1)

30. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Найдите все натуральные числа x и y , удовлетворяющие уравнению

$$x^3 + 2y^2 = 2016.$$

(12, 30), (12, 6)

31. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Какие из значений 8, 43, 2010 может принимать N , если известно, что уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

имеет единственное решение в натуральных числах x и y ?

43

32. («Ломоносов», 2015, 9) Найдите все решения системы в натуральных числах:

$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2), \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2). \end{cases}$$

(1, 1, 1, 1)

33. (Моск. матем. регата, 2012, 9) Найдите все натуральные решения уравнения

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}.$$

1

34. (Турнир им. Ломоносова, 1990) Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?

124

35. («Ломоносов», 2018, 9) Найдите все натуральные k , при которых число $k^2 - 101k$ является точным квадратом, т. е. квадратом целого числа.

1092 или 101

Уравнения с факториалами

36. (Моск. матем. регата, 2001, 8) Найдите все натуральные m и n , для которых выполняется равенство

$$m! + 12 = n^2.$$

9 = n, 4 = m

37. (ОММО, 2017) Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что

$$x! + y! = 24z + 2017.$$

Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z) .

(1, 4, -83); (4, 1, -83); (1, 5, -79); (5, 1, -79)

38. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = z, \\ x! + y! = z!. \end{cases}$$

(2, 1, 1)

Уравнения с показательными функциями

39. Решите в целых числах уравнение:

а) $3^x + 1 = 2^y$;

б) $2^x + 1 = y^2$;

в) $2^x + 7 = y^2$;

г) $x^2 + x - 2 = 6^y$;

д) $3^x - 1 = 2^y$;

е) $3^x = 4y + 5$.

... ' 2 ' 1 ' 0 = 2 ' (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0) (2 ' 1 ' 0)

40. («Высшая проба», 2013, 8) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$2x^2 - y^2 = 2^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$$(1, 0), (1, -1), (1, -2), (3, -1)$$

41. («Высшая проба», 2013, 10) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 2^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$$(2, 0), (2, -1), (4, 0), (6, -1), (8, -1)$$

42. («Высшая проба», 2013, 11) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$$(1, 0), (3, 0), (9, -1), (27, -2)$$

Всероссийская олимпиада школьников по математике

43. (Всеросс., 2004, финал, 9.5) Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p и q , что

$$m + n = p + q \quad \text{и} \quad \sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 2004?$$

44. (Всеросс., 2006, финал, 9.2) Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c и d , по модулю больших 1000000, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}.$$

45. (Всеросс., 1997, финал, 10.1, 11.1) Решить в целых числах уравнение

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y.$$

46. (Всеросс., 1993, ОЭ, 9.5, 10.5) Докажите, что уравнение

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$

не имеет решений в целых числах.

47. (Всеросс., 2014, РЭ, 11.2) На доске написано выражение

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f},$$

где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf ?

48. (Всеросс., 2003, ОЭ, 11.1) Найдите все простые p , для каждого из которых существуют такие натуральные x и y , что $p^x = y^3 + 1$.

49. (Всеросс., 2016, РЭ, 11.8) Натуральное число N представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

Московская математическая олимпиада

50. (ММО, 1948, 7–8) Сумма обратных величин трёх целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

51. (ММО, 1948, 9–10) Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство

$$|x| + |y| < 100?$$

10861

52. (ММО, 1955, 7) Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

53. (ММО, 1963, 8) Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

54. (ММО, 1983, 7) Найти все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

55. (ММО, 1994, 9) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

имеет бесконечное число решений в целых числах x, y, z .

56. (ММО, 2002, 9) Найдите все целые числа x и y , удовлетворяющие уравнению

$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

57. (ММО, 2007, 10) Существуют ли такие натуральные числа x и y , что $x^2 + x + 1$ является натуральной степенью y , а $y^2 + y + 1$ — натуральной степенью x ?

58. (ММО, 1998, 11) Решите в натуральных числах уравнение

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

59. (ММО, 1941, 9–10) Решить в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

60. (ММО, 1958, 9) Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y-1} + (x+1)^{2y-1} = (x+2)^{2y-1}.$$

61. (ММО, 1958, 10) Решить в натуральных числах уравнение

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

62. (ММО, 1967, 10) Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.

63. (ММО, 1999, 11) Решите в натуральных числах уравнение

$$(1 + n^k)^l = 1 + n^m,$$

где $l > 1$.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

64. (Олимпиада им. Эйлера, 2011) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d , что

$$a + b = c + d = ab - cd = 4n.$$

Турнир городов

65. (Турнир городов, 1985, 7–8) Решить в целых числах уравнение

$$2^n + 7 = x^2.$$

8 = x, 1 = u

66. (Турнир городов, 1998, 8–9) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

67. (Турнир городов, 1997, 8–9) Квадрат разрезали на 25 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1). Найдите площадь исходного квадрата.

67

68. (Турнир городов, 1997, 10–11) Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1). Найдите объём исходного куба.

121

69. (Турнир городов, 1991, 8–9) Решить в натуральных числах уравнение

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

(1, 2, 3)

70. (Турнир городов, 1990, 8–9) В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.

1101 5

71. (Турнир городов, 2009, 8–9) Даны три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других. Может ли произведение этих трёх чисел являться точной 2008-й степенью натурального числа?

57

72. (Турнир городов, 2009, 10–11) Существует ли арифметическая прогрессия из пяти различных натуральных чисел, произведение которых есть точная 2008-я степень натурального числа?

17

73. (Турнир городов, 1994, 10–11) Конечно или бесконечно множество натуральных решений уравнения

$$x^2 + y^3 = z^2?$$

Бесконечно

74. (Турнир городов, 1998, 10–11) Докажите, что уравнение

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

75. (Турнир городов, 1991, 10–11) Укажите все такие натуральные n и целые неравные друг другу x и y , при которых верно равенство

$$x + x^2 + x^4 + \dots + x^{2^n} = y + y^2 + y^4 + \dots + y^{2^n}.$$

$n \in \mathbb{N}, x \neq y, x, y \in \mathbb{Z}$

76. (Турнир городов, 2014, 10–11) Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.

IMO

77. (IMO, 2006) Найдите все пары (x, y) целых чисел, такие, что

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(0, ±2); (4, ±23)

78. (IMO, 1997) Найдите все пары (a, b) целых чисел $a, b \geq 1$, удовлетворяющих уравнению

$$a^{b^2} = b^a.$$

(1, 1); (2, 2); (3, 27)