Уравнения в целых числах

Обычная постановка задачи такова: дано уравнение с двумя (или более) неизвестными, и требуется найти все его целочисленные решения. Решающую роль тут обычно играют соображения делимости.

1. Решите в целых числах уравнение:

а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $xy = x + y + 3$.

$\boxed{\text{а) } (16, 15), (16, -15), (-16, 15), (-16, -15); \text{ б) } (5, 2), (2, 5), (0, -3), (-3, 0), (-1, -1), (3, 3)}$

2. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p + n$?

$\boxed{\text{Одно}}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9*) Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение abc.

$\boxed{80}$

4. (*ОММО, 2015, 9–10*) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{13 - a}(x + y) - \sqrt{13a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

$\boxed{12}$

5. (*«Ломоносов», 2011, 10*) Решите в натуральных числах уравнение

$$a^b + b^a = 2011.$$

$\boxed{(2010, 1), (1, 2010)}$

6. Решите в целых числах уравнение:

а) $2x + 3y = 4$; б) $4x + 5y = 1$;
в) $8x - 3y = -2$; г) $5x - 9y = 24$.

$\boxed{\text{а) } x = 2 - 3k,\ y = 2k; \text{ б) } x = -1 - 5k,\ y = 1 + 4k; \text{ в) } x = 2 + 3k,\ y = 6 + 8k; \text{ г) } x = 12 + 9k,\ y = 4 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9*) В прямоугольном треугольнике длины всех сторон являются натуральными числами, при этом один из катетов равен 2012. Найдите все такие треугольники.

$\boxed{(2012, 253005, 253013); (2012, 506016, 506020); (2012, 1012035, 1012037); (2012, 1509, 2515)}$

8. (*«Ломоносов», 2011, 10*) Дано простое число p. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^2 = y^2 + 2010p.$$

$\boxed{(1006, 1004), (338, 332), (206, 196), (82, 52) \text{ при } p = 2; \text{ если } p \neq 2, \text{ то решений нет}}$

9. Докажите, что уравнение не имеет решений в целых числах:

а) $x^2 - 3y = 17$; б) $x^2 + 4x - 8y = 11$;

в) $3x^2 - 4y^2 = 13$; г) $2x^2 - 5y^2 = 7$.

$\boxed{\text{Указание: а) mod 3; б) mod 4}}$

10. (*МГУ, химический ф-т, 1993*) Найти все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению

$$6m^2 - 2n^2 + mn = 3.$$

$\boxed{(1, -1),\ (-1, 1)}$

11. (*МГУ, ВШБ, 2004*) Найти все пары целых неотрицательных чисел (k, m), являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

$\boxed{(9, 9)}$

12. (*«Физтех», 2011, 9, 11*) Целые числа m и n таковы, что

$$4m + 5n = mn - 9.$$

Найдите, какое наибольшее значение может принимать m.

$\boxed{34}$

13. (*«Ломоносов», 2012, 9*) Найдите периметр выпуклого многоугольника, множество вершин которого в координатной записи совпадает с множеством целочисленных пар решений уравнения

$$x^2 + xy = x + 2y + 9.$$

$\boxed{16 + 12\sqrt{5}}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Решить в целых числах уравнение

$$x^6 = y^3 + 217.$$

$\boxed{(-1, -6);\ (1, -6);\ (-3, 8);\ (3, 8)}$

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$x^2 + xy = y + 92.$$

$\boxed{(2, 88);\ (8, 4)}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Найдите все пары целых чисел (x, y) для которых выполнено равенство

$$x^2 + y^2 = x + y + 2.$$

$\boxed{(-1,0);\ (-1,1);\ (0,-1);\ (0,2);\ (1,-1);\ (1,2);\ (2,0);\ (2,1)}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Решите в натуральных числах уравнение

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}\,.$$

$\boxed{n = 1}$

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5xy + y - 5x = 1038.$$

$\boxed{(12, 18)}$

19. (*МФТИ, 2004*) Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

$\boxed{(6,-5),\ (4,5),\ (-4,-3)}$

20. (*МГУ, ИСАА, 1997*) Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$3xy - 14x - 17y + 71 = 0.$$

$\boxed{(4,3),\ (6,13),\ (14,5)}$

21. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2003*) Найдите все целые решения (x, y, z) уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

$\boxed{(7k, 3k, 2k),\ k \in \mathbb{Z}}$

22. (*МГУ, химический ф-т, 1997*) Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

$\boxed{(0,0),\ (2,2),\ (0,3),\ (3,0)}$

23. (*МФТИ, 1998*) Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0.$$

$\boxed{(4,27),\ (2,-17),\ (22,423),\ (-16,307)}$

24. (*МГУ, ВМК, 1996*) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

$\boxed{(2,3),\ (2,-3),\ (-2,3),\ (-2,-3)}$

25. (*«Физтех», 2007*) Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 8xy - y^2 + 16 = 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(-5,1);\ (-3,1)}$

26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016.$$

$\boxed{x = 4,\ y = 20}$

27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Решите уравнение в целых числах:

$$\sqrt{9x^2 + 80x - 40} = 3x - 20y.$$

$\boxed{(-13,-3);\ (-59,-17)}$

28. (*«Ломоносов», 2013, 9*) Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполняется равенство

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = m(m-1).$$

$\boxed{(1,1);\ (2,1);\ (3,1)}$

29. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^3 + 2y^2 = 2016.$$

$\boxed{(12,12);\ (6,30)}$

30. Решите в целых числах уравнение:

а) $3^x + 1 = 2^y$; б) $2^x + 1 = y^2$;

в) $2^x + 7 = y^2$; г) $x^2 + x - 2 = 6^y$.

$\boxed{\text{а) } (0,1),\ (1,2);\ \text{б) } (3,3),\ (3,-3);\ \text{в) } (1,3),\ (1,-3);\ \text{г) решений нет}}$

31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Какие из значений 8, 43, 2010 может принимать N, если известно, что уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

имеет единственное решение в натуральных числах x и y?

$\boxed{43}$

32. (*«Ломоносов», 2015, 9*) Найдите все решения системы в натуральных числах:

$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2), \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2). \end{cases}$$

$\boxed{(1, 1, 1)}$

33. (*«Высшая проба», 2013, 8*) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$2x^2 - y^2 = 2^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$\boxed{(1, 0),\ (1, -1),\ (-1, 1),\ (-3, 4)}$

34. (*«Высшая проба», 2013, 10*) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 2^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$\boxed{(2, 0),\ (2, -1),\ (4, 0),\ (6, -4),\ (12, -8)}$

35. (*«Высшая проба», 2013, 11*) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$\boxed{(1, 0),\ (3, 0),\ (-2, 3),\ (-6, 9)}$

36. (*Моск. матем. регата, 2012, 9*) Найдите все натуральные решения уравнения

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}\,.$$

$\boxed{1}$

37. (*Моск. матем. регата, 2001, 8*) Найдите все натуральные m и n, для которых выполняется равенство

$$m! + 12 = n^2.$$

$\boxed{m = 4,\ n = 6}$

38. (*Турнир им. Ломоносова, 1990*) Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?

$\boxed{1024}$

Всероссийская олимпиада школьников по математике

39. (*Всеросс., 2014, регион, 11.2*) На доске написано выражение

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f},$$

где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf?

40. (*Всеросс., 1993, округ, 10.5*) Докажите, что уравнение

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$

не имеет решений в целых числах.

41. (*Всеросс., 2003, округ, 11.1*) Найдите все простые p, для каждого из которых существуют такие натуральные x и y, что $p^x = y^3 + 1$.

42. (*Всеросс., 2016, регион, 11.8*) Натуральное число N представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

43. (*Всеросс., 1997, финал, 10.1, 11.1*) Решить в целых числах уравнение

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = 1 + 16y.$$

$\boxed{(\pm1, 0),\ (\pm4, 3),\ (\pm4, 5)}$

44. (*Всеросс., 2004, финал, 9.5*) Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p и q, что

$$m + n = p + q \quad \text{и} \quad \sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 2004\,?$$

45. (*Всеросс., 2006, финал, 9.2*) Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c и d, по модулю больших 1000000, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}.$$

Московская математическая олимпиада

46. (*ММО, 1948, 7–8*) Сумма обратных величин трёх целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

$\boxed{(3, 3, 3),\ (2, 4, 4),\ (2, 3, 6)}$

47. (*ММО, 1948, 9–10*) Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство

$$|x| + |y| < 100\,?$$

$\boxed{19801}$

48. (*ММО, 1955, 7*) Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

$\boxed{(0,0,0)}$

49. (*ММО, 1963, 8*) Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

$\boxed{(1,1,1);\ (-1,-1,-1)}$

50. (*ММО, 1983, 7*) Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

$\boxed{(\pm 4, 1);\ (\pm 4, -3)}$

51. (*ММО, 1994, 9*) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

имеет бесконечное число решений в целых числах x, y, z.

52. (*ММО, 2002, 9*) Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

$\boxed{x = \pm 1,\ y = 0}$

53. (*ММО, 2007, 10*) Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x^2 + x + 1$ является натуральной степенью y, а $y^2 + y + 1$ — натуральной степенью x?

$\boxed{\text{Нет}}$

54. (*ММО, 1998, 11*) Решите в натуральных числах уравнение

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

$\boxed{(2,2,2)}$

55. (*ММО, 1941, 9–10*) Решить в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$\boxed{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)}$

56. (*ММО, 1958, 9*) Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y-1} + (x+1)^{2y-1} = (x+2)^{2y-1}.$$

$\boxed{(1, 1)}$

57. (*ММО, 1958, 10*) Решить в натуральных числах уравнение

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

$\boxed{(3, 1)}$

58. (*ММО, 1967, 10*) Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.

59. (*ММО, 1999, 11*) Решите в натуральных числах уравнение

$$\left(1 + n^k\right)^l = 1 + n^m,$$

где $l > 1$.

$\boxed{n = 2,\ k = 1,\ l = 2,\ m = 3}$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

60. (*Олимпиада им. Эйлера, 2011*) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что

$$a + b = c + d = ab - cd = 4n.$$

Турнир городов

61. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) Решить в целых числах уравнение

$$2^n + 7 = x^2.$$

$\boxed{n = 1,\ x = 3}$

62. (*Турнир городов, 1998, 8–9*) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

63. (*Турнир городов, 1997, 8–9*) Квадрат разрезали на 25 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1). Найдите площадь исходного квадрата.

$\boxed{49}$

64. (*Турнир городов, 1997, 10–11*) Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1). Найдите объём исходного куба.

125

65. (*Турнир городов, 1991, 8–9*) Решить в натуральных числах уравнение

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}\,.$$

(1, 2, 3)

66. (*Турнир городов, 1990, 8–9*) В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.

5 тонн

67. (*Турнир городов, 2009, 8–9*) Даны три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других. Может ли произведение этих трёх чисел являться точной 2008-й степенью натурального числа?

Да

68. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) Существует ли арифметическая прогрессия из пяти различных натуральных чисел, произведение которых есть точная 2008-я степень натурального числа?

Да

69. (*Турнир городов, 1994, 10–11*) Конечно или бесконечно множество натуральных решений уравнения

$$x^2 + y^3 = z^2\,?$$

Бесконечно

70. (*Турнир городов, 1998, 10–11*) Докажите, что уравнение

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

71. (*Турнир городов, 1991, 10–11*) Укажите все такие натуральные n и целые неравные друг другу x и y, при которых верно равенство

$$x + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2^n} = y + y^2 + y^4 + \ldots + y^{2^n}.$$

$n = 1$; $x = k$, $y = -k - 1$ для всех целых k

72. (*Турнир городов, 2014, 10–11*) Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.

IMO

73. (*IMO, 2006*) Найдите все пары (x, y) целых чисел, такие, что

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

$\boxed{(0, \pm 2);\ (4, \pm 23)}$

74. (*IMO, 1997*) Найдите все пары (a, b) целых чисел $a, b \geqslant 1$, удовлетворяющих уравнению

$$a^{b^2} = b^a.$$

$\boxed{(1, 1);\ (16, 2);\ (27, 3)}$