Чётность

Содержание

В некоторых задачах чётность оказывается *инвариантом* (не меняется при данных операциях), что позволяет доказать невозможность некоторого результата этих операций.

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. [Vse — 2017.S.10.2] Можно ли все натуральные числа от 1 до 800 разбить на пары так, чтобы сумма любой пары чисел делилась на 6?

1.2. [Vse — 2018.M.11.4] В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые: каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним). Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечётным?

1.3. [Vse — 2006.R.8.5;9.5] На доске записано произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения ровно 32 из этих выражений чётные. Какое наибольшее количество чётных чисел среди $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ могло быть?

1.4. [Vse — 1998.R.8.6] У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.

1.5. [Vse — 2010.R.9.5] Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность (из большего вычел меньшее). В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

1.6. [Vse — 2013.R.9.1;10.1] Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N?

1.7. [Vse — 2007.F.9.2] На доске написали 100 дробей, у которых в числителях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу, и в знаменателях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу. Оказалось, что сумма этих дробей есть несократимая дробь со знаменателем 2. Докажите, что можно поменять местами числители двух дробей так, чтобы сумма стала несократимой дробью с нечётным знаменателем.

1.8. [Vse — 2011.R.10.3] Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$, где $1 \leqslant k, l \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)?

1.9. [Vse — 2011.R.11.2] Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.

1.10. [Vse — 2015.F.11.2] Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

2 Московская математическая олимпиада

2.1. [Mos — 1993.8.3] На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

2.2. [Mos — 2011.8.4] Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечётного числа сторон клеток квадрата 100×100, соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток?

2.3. [Mos — 2005.8.4] По кругу расставлены 2005 натуральных чисел. Доказать, что найдутся два соседних числа такие, что после их выкидывания оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой.

2.4. [Mos — 1973.8.5] В трёх вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т. е. прыгают друг через друга. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли один из них попасть в четвёртую вершину квадрата?

2.5. [Mos — 1996.8.5] В углу шахматной доски размером $n \times n$ полей стоит ладья. При каких n, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, она может за n^2 ходов побывать на всех полях доски и вернуться на место? (Учитываются только поля, на которых ладья останавливалась, а не те, над которыми она проносилась во время хода.)

2.6. [Mos — 2004.9.1] Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12.00 повышается или понижается на 17% (курс не округляется). Может ли курс акций дважды принять одно и то же значение?

2.7. [Mos — 2003.10.2] По рёбрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечётным числом сторон нечётно.

2.8. [Mos — 1998.11.5] Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из 61 одинаковых согласованно вращающихся шестерёнок так, чтобы углы между сцепленными шестерёнками были не меньше 150°? При этом:

1) для простоты шестерёнки считаются кругами;

2) шестерёнки сцеплены, если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную;

3) угол между сцепленными шестерёнками — это угол между радиусами их окружностей, проведенными в точку касания;

4) первая шестерёнка должна быть сцеплена со второй, вторая — с третьей, и т. д., 61-я — с первой, а другие пары шестеренок не должны иметь общих точек.

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2010.R.5] Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность (из большего вычел меньшее). В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

3.2. [Eul — 2013.R.7] Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

3.3. [Eul — 2015.F.5] 40 разбойников переправились с помощью двухместной лодки с левого берега реки на правый (некоторые рейсы, возможно, выполнялись в одиночку). Могло ли случиться, что каждая пара разбойников пересекла реку вместе ровно один раз (с левого берега на правый или с правого на левый)?

3.4. [Eul — 2012.F.5] Можно ли расставить на рёбрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

3.5. [Eul — 2011.F.2] За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?