Нестандартные задачи на ЕГЭ по математике

Здесь приведены нестандартные задачи, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических работах МИОО начиная с 2010 года.

Все задачи снабжены авторскими решениями. При этом не ставилась цель сделать решения максимально лаконичными и технически совершенными. Цель совсем другая: как можно яснее и отчётливее излагать идеи, лежащие в основе решения каждой задачи.

Решая задачу на экзамене или олимпиаде, мы во многих случаях не обязаны объяснять, из каких соображений построен нужный пример, найдено нужное число и т. д. Здесь, тем не менее, мы по возможности стараемся давать соответствующие объяснения. Наводящие соображения (не нужные, повторяем, при записи решения) набраны более мелким шрифтом внутри значков ► и ◄.

Задача 1. (*ЕГЭ, 2017*) На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

Задача 2. (*ЕГЭ, 2017*) На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Задача 3. (*Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017*) Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c — натуральные числа, не превосходящие 100. Также известно, что числа a, b и c попарно отличаются друг от друга не менее, чем на 2.

а) Может ли такое уравнение иметь корень -7?

б) Может ли такое уравнение иметь корень -53?

в) Какой наименьший целый корень может иметь такое уравнение?

Задача 4. (*МИОО, 2017*) На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 38, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 11 до 22 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 4, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Задача 5. (*МИОО, 2017*) Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2} = 7a_{k+1} - 3a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $a_n = 4a_2 - 3a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 527$?

Задача 6. (*МИОО, 2017*) Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 6$, в которой $a_6 = 6$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чётных двузначных чисел?

Задача 7. (*ЕГЭ, 2016*) На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a+b$ и $2a-1$, или $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 13.

б) Может ли после 200 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 400?

в) Сделали 513 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Задача 8. (*ЕГЭ, 2016*) На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных пяти ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Задача 9. (*ЕГЭ, 2016*) Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 10$?

Задача 10. (*ЕГЭ, 2016*) В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» — процент побед, округлённый до целого, «ничьи» — процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17.)

а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?

б) Может ли после выигранной партии увеличиться показатель «поражений»?

в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

Задача 11. (*ЕГЭ, 2016*) Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Задача 12. (*ЕГЭ, 2016*) На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

Задача 13. (*ЕГЭ, 2016*) Последовательность a_1, a_2, $\ldots$, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1{,}6$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?

в) Найдите наибольшее возможное значение M_3.

Задача 14. (*ЕГЭ, 2016*) Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 11, а сумма которых больше 110, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 110, но больше:

а) 99;

б) 101;

в) 100?

Задача 15. (*ЕГЭ, 2016*) Множество чисел назовем *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{200; 201; 202; \ldots; 299\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{100}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$?

Задача 16. (*МИОО, 2016*) Возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, …, a_n, … и b_1, b_2, …, b_n, … состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leqslant 300$?

Задача 17. (*МИОО, 2016*) Возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, …, a_n, … и b_1, b_2, …, b_n, … состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых a_1/b_1, a_2/b_2 и a_4/b_4 — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых a_1/b_1, b_2/a_2 и a_4/b_4 — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь a_2/b_2, если известно, что a_1/b_1, a_2/b_2 и a_{10}/b_{10} — различные натуральные числа?

Задача 18. (*МИОО, 2016*) Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, …, a_7 ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, …, a_{49} ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$$

больше кратных 100, чем среди чисел a_{2n+1}, a_{2n+2}, …, a_{5n}?

Задача 19. (*МИОО, 2016*) Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ при всех натуральных $n \geqslant 2$.

а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?

б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{S_5^2}{S_1S_{10}}$?

Задача 20. (*МИОО, 2016*) Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна трём.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Задача 21. (*МИОО, 2015*) Будем называть четырёхзначное число *очень счастливым*, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли десять последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть два очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2015?

в) Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Задача 22. (*ЕГЭ, 2015*) Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если набрал не менее 85 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 7 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 85, средний балл участников, не сдавших тест, составил 70. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 100, а не сдавших тест — 72. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Задача 23. (*ЕГЭ, 2015*) Три числа назовем хорошей тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовем отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (не обязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек может оказаться среди них?

Задача 24. (*ЕГЭ, 2015*) В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (не обязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Задача 25. (*ЕГЭ, 2015*) На доске написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых больше 4, но не превосходит 44. Среднее арифметическое написанных чисел равно 11. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 3, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 16?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 14, но меньше 15?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Задача 26. (*ЕГЭ, 2015*) В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальное поделить поровну на 80 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Задача 27. (*ЕГЭ, 2015*) На доске написано число 2045 и ещё несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1024 числа?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Задача 28. (*ЕГЭ, 2015*) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в три раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в пять раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задача 29. (*МИОО, 2015*) Последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ... состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство

$$6na_{n+1} = (n^2 + 24)a_n\,?$$

Задача 30. (*МИОО, 2015*) Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные натуральные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

Задача 31. (*МИОО, 2015*) В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Задача 32. (*МИОО, 2015*) Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Задача 33. (*ЕГЭ, 2014*) Даны последовательные нечётные числа 1, 3, 5, ..., 77, 79. Из них выбирают произвольно семь чисел, располагают их в порядке возрастания и четвёртое по величине число (медиану ряда) принимают за A, а среднее арифметическое всех семи чисел принимают за B.

а) Может ли $B - A$ быть равным $2/7$?

б) Может ли $B - A$ быть равным $3/7$?

в) Найти наибольшее возможное значение $B - A$.

Задача 34. (*ЕГЭ, 2014*) Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $1/25$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $1/35$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Задача 35. (*ЕГЭ, 2014*) На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь стал равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Задача 36. (*ЕГЭ, 2014*) а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Задача 37. (*ЕГЭ, 2014*) В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Какое наибольшее количество девушек в такой группе?

Задача 38. (*ЕГЭ, 2014*) Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, ..., 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.

Задача 39. (*ЕГЭ, 2014*) На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Задача 40. (*ЕГЭ, 2014*) Целое число S является суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли S равняться 8?

б) Может ли S равняться 1?

в) Найдите все значения, которые может принимать S.

Задача 41. (*МИОО, 2014*) По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Задача 42. (*МИОО, 2013*) Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Задача 43. (*ЕГЭ, 2013*) Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа a.

Задача 44. (*ЕГЭ, 2013*) Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 83?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задача 45. (*ЕГЭ, 2013*) Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{350}, \quad S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{350}^2,$$
$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{350}^3, \quad S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 569$.

а) Найдите S_4, если ещё известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.

б) Может ли $S_4 = 4857$?

в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Задача 46. (*ЕГЭ, 2013*) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет записан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -8, -5, -4, -3, -1, 1, 4. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задача 47. (*ЕГЭ, 2013*) Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Задача 48. (*ЕГЭ, 2013*) Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Задача 49. (*ЕГЭ, 2013*) Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geqslant 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

Задача 50. (*МИОО, 2012*) Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

Задача 51. (*ЕГЭ, 2012*) Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Задача 52. (*ЕГЭ, 2012*) В ряд выписаны числа 1^2, 2^2, $\ldots$, $(N-1)^2$, N^2. Между ними произвольным образом расставляют знаки $+$ и $-$ и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если $N = 12$?

б) 0, если $N = 69$?

в) 0, если $N = 64$?

г) 5, если $N = 90$?

Задача 53. (*ЕГЭ, 2012*) Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадёт только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 20.

а) Может ли число S быть равным 40?

б) Может ли число S быть больше $39\frac{1}{21}$?

в) Найдите максимально возможное значение S.

Задача 54. (*ЕГЭ, 2012*) По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх подряд идущих чисел должно быть хотя бы одно положительное.

а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

Задача 55. (*ЕГЭ, 2012*) Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

Задача 56. (*ЕГЭ, 2012*) Учитель в школе ставит отметки от 1 до 5. Средний балл ученика равен 4,625.

а) Какое наименьшее количество оценок может иметь ученик?

б) Если у ученика заменить оценки 3, 3, 5, 5 на две четвёрки, то на сколько максимально может увеличиться средний балл?

Задача 57. (*ЕГЭ, 2012*) Назовем кусок веревки *стандартным*, если его длина не меньше 168 см, но не больше 175 см.

а) Некоторый моток веревки разрезали на 24 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Задача 58. (*ЕГЭ, 2012*) Имеется 33 коробки массой 19 кг каждая и 27 коробок массой 49 кг каждая. Все эти коробки раскладываются по двум контейнерам. Пусть S — модуль разности суммарных масс коробок в контейнерах. Найдите наименьшее значение S:

а) если дополнительно требуется, что в контейнерах должно находиться одинаковое количество коробок;

б) без дополнительного условия пункта *а*.

Задача 59. (*ЕГЭ, 2012*) Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $3/11$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $3/7$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Задача 60. (*ЕГЭ, 2012*) Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$ по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Задача 61. (*Пробный ЕГЭ, 2012, Москва*) Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Задача 62. (*Пробный ЕГЭ, 2012, Санкт-Петербург*) На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т. д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Задача 63. (*ФЦТ, 2012*) Имеется арифметическая прогрессия, состоящая из пятидесяти чисел.

а) Может ли эта прогрессия содержать ровно 6 целых чисел?

б) Может ли эта прогрессия содержать ровно 29 целых чисел?

в) Найдите наименьшее число n, при котором эта прогрессия **не** может содержать ровно n целых чисел.

Задача 64. (*МИОО, 2012*) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Задача 65. (*МИОО, 2011*) Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 210 и 350.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Задача 66. (*ЕГЭ, 2011*) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Задача 67. (*ЕГЭ, 2011*) Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?

Задача 68. (*ЕГЭ, 2011*) Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Задача 69. (*ЕГЭ, 2011*) На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -12.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задача 70. (*ЕГЭ, 2010*) Каждое из чисел $11, 12, \ldots, 19$ умножают на каждое из чисел $3, 4, \ldots, 8$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Задача 71. (*ЕГЭ, 2010*) Перед каждым из чисел $6, 7, \ldots, 11$ и $9, 10, \ldots, 17$ произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Ответы и решения

Задача 1. Ответ: а) да; б) нет; в) два или три.

Решение. а) Пример подходящего набора: 7, 8, 9, 10, 13.

б) Предположим, что написан набор из 10 чисел, удовлетворяющий условию. Пусть a — наименьшее число набора, b — наибольшее число. Тогда выполнены неравенства $b \geqslant a+9$ и $b \leqslant 3a$, откуда $3a \geqslant a+9$ и $a \geqslant 5$. Но тогда сумма всех чисел не меньше $5+6+\ldots+14=95$ и потому не может равняться 94.

в) Два или три числа написать можно. Примеры подходящих наборов: $\{80, 100\}$ и $\{16, 20, 25\}$.

Предположим, что написаны четыре числа. Из разложения на простые множители

$$8000 = 2^6 \cdot 5^3$$

видно, что все четыре числа не могут делиться на 5 (иначе в разложение их произведения множитель 5 входил бы как минимум в четвёртой степени). Если на 5 делятся три числа $a < b < c$, то в разложение каждого из них множитель 5 входит в первой степени; значит, эти разложения отличаются только степенями двойки, а тогда a и c отличаются не менее чем в 4 раза.

Таким образом, два числа $a < b$ из написанных четырёх — степени двойки, причём последовательные (иначе они отличаются не менее чем в 4 раза). Тогда $b \leqslant 8$, так как показатель степени двойки в произведении ab не превосходит 6. Произведение двух оставшихся чисел делится на 5^3, поэтому одно из них не менее 25 и превышает число b более чем в три раза. Противоречие.

Следовательно, четыре числа (или более) написаны быть не могут.

Задача 2. Ответ: а) да; б) нет; в) 35.

Решение. а) Пример: 6, 7, 8, 9, 10. Наименьшее из произведений равно $6 \cdot 7 > 40$, наибольшее из произведений равно $9 \cdot 10 < 100$.

б) Предположим, что нашлись шесть натуральных чисел $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$, удовлетворяющих условию задачи. Тогда $x_1x_2 > 40$ и $x_5x_6 < 100$. Следовательно, $x_2 \geqslant 7$ (иначе $x_1x_2 \leqslant 5 \cdot 6 = 30$) и, аналогично, $x_5 \leqslant 9$. Но тогда четырёхэлементное множество $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ содержится в трёхэлементном множестве $\{7, 8, 9\}$ — противоречие.

в) Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ — четыре натуральных числа, удовлетворяющих условию задачи. Снова имеем $x_2 \geqslant 7$ и $x_3 \leqslant 9$; легко видеть, что в таком случае $x_2 \in \{7, 8\}$ и $x_3 \in \{8, 9\}$, поэтому

$$x_2 + x_3 \leqslant 8 + 9 = 17.$$

Далее, $x_1 \geqslant 6$ (иначе $x_1x_2 \leqslant 5 \cdot 8 = 40$), то есть $x_1 \in \{6, 7\}$; аналогично $x_4 \in \{9, 10, 11, 12\}$. Отсюда

$$x_1 + x_4 \leqslant 7 + 12 = 19.$$

В итоге получаем

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 17 + 19 = 36.$$

Значение $S = 36$ достигается для единственного набора $x_1 = 7$, $x_2 = 8$, $x_3 = 9$, $x_4 = 12$, но этот набор не годится, поскольку для него $x_3x_4 > 100$.

Тогда $S \leqslant 35$. Значение $S = 35$ достигается для набора $x_1 = 7$, $x_2 = 8$, $x_3 = 9$, $x_4 = 11$, который удовлетворяет условию задачи.

Задача 3. Ответ: а) да; б) нет; в) -50.

Решение. а) Например, $x^2+14x+49=0$.

► Для построения примера полагаем в уравнении $x=-7$; получим $49a-7b+c=0$. Видно, что можно взять $c=49$, $a=1$ и $b=14$. Так можно найти и другие примеры. ◄

б) Имея в виду следующий пункт, докажем сразу, что уравнение не может иметь целый корень, меньший -50.

Предположим, что уравнение имеет целый корень $-n$, где $n \geqslant 51$. Тогда $an^2-bn+c=0$, и, значит, c делится на n. Поскольку $c \leqslant 100$, имеем также $n \leqslant 100$ и, кроме того, $c=n$ ($c \neq 0$, поскольку коэффициенты уравнения — натуральные числа). Отсюда $an^2-bn+n=0$ или $b=an+1$. Если $a=1$, то $b=n+1$, и тогда b и c отличаются на единицу. Если же $a \geqslant 2$, то $b>100$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием.

В частности, уравнение не может иметь корень -53.

в) Уравнение $x^2+52x+100=0$ удовлетворяет условию и имеет корень -50. С учётом предыдущего пункта заключаем, что наименьший возможный целый корень нашего уравнения равен -50.

Задача 4. Ответ: а) да; б) нет; в) $\left(\frac{95}{63}\right)^2$.

Решение. а) Сотрём 11 и 21, 12 и 17, 13 и 18, 14 и 19, 15 и 20. Остались числа 16 и 22, в сумме дающие 38.

б) Число, кратное 5, может быть стёрто только вместе с числом, кратным 5. Изначально написано семь чисел, кратных 5, а именно 65^2, 70^2, 75^2, 80^2, 85^2, 90^2 и 95^2. Значит, одно из них осталось на доске. Произведение этого числа со вторым из оставшихся чисел кратно 5, то есть оканчивается на 0 или 5. Следовательно, это произведение не может оканчиваться на 4.

в) Пусть t — отношение большего из оставшихся чисел к меньшему. Если число 63^2 осталось на доске, то $t \leqslant \left(\frac{95}{63}\right)^2$. Если 63^2 стёрто, то $t \leqslant \left(\frac{96}{65}\right)^2$. Следовательно,

$$t \leqslant \max\left\{\left(\frac{95}{63}\right)^2, \left(\frac{96}{65}\right)^2\right\} = \left(\frac{95}{63}\right)^2.$$

Числа 63^2 и 95^2 могут остаться на доске. Именно, стираем следующие пары:

$$\begin{array}{lllll}
(93^2, 68^2), & (64^2, 69^2), & (65^2, 70^2), & (66^2, 71^2), & (67^2, 72^2), \\
(73^2, 78^2), & (74^2, 79^2), & (75^2, 80^2), & (76^2, 81^2), & (77^2, 82^2), \\
(83^2, 88^2), & (84^2, 89^2), & (85^2, 90^2), & (86^2, 91^2), & (87^2, 92^2), \\
(94^2, 96^2). & & & &
\end{array}$$

Значит, $t_{\max} = \left(\frac{95}{63}\right)^2$.

Задача 5. Ответ: а) см. ниже; б) нет; в) 2.

Решение. Обозначим $d_k = a_{k+1}-a_k$. Перепишем рекуррентное соотношение в виде

$$4(a_{k+2}-a_{k+1}) = 3(a_{k+1}-a_k)$$

или $4d_{k+1} = 3d_k$. Следовательно, разности d_k образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $3/4$:

$$d_{k+1} = \frac{3}{4}d_k = \left(\frac{3}{4}\right)^2 d_{k-1} = \ldots = \left(\frac{3}{4}\right)^k d_1.$$

а) Для построения примера можно взять $d_1 = 4^3 = 64$ и $a_1 = 1$. Получим последовательность 1, 65, 113, 149, 176.

б) Заметим, что $4a_2 - 3a_1 = 4(a_1 + d_1) - 3a_1 = a_1 + 4d_1$. Далее,

$$a_n = a_1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = a_1 + d_1\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\right) =$$

$$= a_1 + d_1\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} = a_1 + 4d_1\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) < a_1 + 4d_1.$$

Следовательно, равенство $a_n = 4a_2 - 3a_1$ не может выполняться ни для какого n.

в) Пусть

$$527 = a_n = a_1 + 4d_1\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right).$$

Тогда $4d_1$ делится на 4^{n-1}, то есть $d_1 = m \cdot 4^{n-2}$ с некоторым натуральным m. Теперь имеем:

$$527 - a_1 = m\left(4^{n-1} - 3^{n-1}\right),$$

так что $527 - a_1$ делится на $4^{n-1} - 3^{n-1}$ при некотором $n \geqslant 3$.

Отметим, что $4^2 - 3^2 = 7$, $4^3 - 3^3 = 37$, $4^4 - 3^4 = 175$ и $4^k - 3^k \geqslant 781$ при $k \geqslant 5$. Число $527 - 1 = 526 = 2 \cdot 263$ не делится ни на одно из этих чисел, поэтому $a_1 \geqslant 2$.

Значение $a_1 = 2$ подходит (число $527 - 2 = 525$ делится на 175). Соответствующая последовательность: 2, 194, 338, 446, 527.

Задача 6. Ответ: а) см. ниже; б) нет; в) 18.

Решение. Обозначим $d_k = a_{k+1} - a_k$. Перепишем рекуррентное соотношение в виде

$$a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k - 2$$

или $d_{k+1} = d_k - 2$. Таким образом, разности d_k образуют убывающую арифметическую прогрессию (с разностью -2).

а) Пример: 1, 6, 9, 10, 9, 6.

► Пример находим следующим образом:

$$6 = a_6 = a_1 + d_1 + (d_1 - 2) + (d_1 - 4) + (d_1 - 6) + (d_1 - 8) = a_1 + 5d_1 - 20,$$

откуда $a_1 + 5d_1 = 26$, и можно положить $a_1 = 1$, $d_1 = 5$. ◄

б) Если $d_1 < 0$, то и все $d_k < 0$, поэтому последовательность убывает: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ Если $d_1 = 2m$ с целым неотрицательным m, то

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{m+1} = a_{m+2} > a_{m+3} > a_{m+4} > \ldots$$

Если же $d_1 = 2m - 1$ с натуральным m, то

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{m+1} > a_{m+2} > a_{m+3} > \ldots$$

В любом случае каждое своё значение последовательность принимает не более двух раз. Следовательно, никакое натуральное число не может встретиться в этой последовательности три раза.

в) Предположим, что последовательность состоит только из чётных двузначных чисел. Тогда $d_1 = 2m$ с целым m.

Рассмотрим вначале случай, когда $d_1 \leqslant 0$ (последовательность не возрастает) или d_1 положительно и достаточно велико — так, что последовательность чётных двузначных чисел не убывает. Тогда модуль суммы десяти последовательных разностей d_1, d_2, …, d_{10} не меньше, чем

$$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 90,$$

поэтому последовательность не может содержать более 10 чисел.

Предположим теперь, что $d_1 = 2m > 0$, и при этом наибольший член последовательности, равный $a_{m+1} = a_{m+2}$, является двузначным числом (так что последовательность «успеет повернуть назад»). Имеем:

$$a_{m+1} = a_1 + 2(m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 1) = a_1 + m(m+1) \leqslant 98,$$

откуда $m(m+1) \leqslant 98 - a_1 \leqslant 98 - 10 = 88$, или $m \leqslant 8$. Значит, в последовательности не более $(8+1) \cdot 2 = 18$ чисел.

Пример подходящей последовательности из 18 чисел: 10, 26, 40, 52, 62, 70, 76, 80, 82, 82, 80, 76, 70, 62, 52, 40, 26, 10.

Задача 7. Ответ: а) см. ниже; б) нет; в) 2.

Решение. а) $(2,3) \to (5,3) \to (8,5) \to (13,9)$.

б) Пусть x_n — наименьшее из чисел после n-го хода. Заметим, что $x_n \geqslant 2x_{n-1} - 1$ с начальным условием $x_0 = 2$.

Докажем по индукции, что $x_n \geqslant 2^n + 1$. База ($n = 0$) очевидна. Индукционный переход:

$$x_{k+1} \geqslant 2x_k - 1 \geqslant 2\left(2^k + 1\right) - 1 = 2^{k+1} + 1.$$

Следовательно, $x_{200} \geqslant 2^{200} + 1 > 400$, так что число 400 не может появиться после 200 ходов.

в) После каждого из ходов $(a,b) \to (a+b, 2a-1)$ и $(a,b) \to (a+b, 2b-1)$ на второй позиции стоит нечётное число. На первой позиции после первого хода стоит нечётное число 5. Следовательно, чётность первого числа чередуется: после нечётных ходов первое число нечётно, а после чётных — чётно.

После 513 хода, таким образом, записаны два нечётных и не равных друг другу числа. Модуль их разности не меньше 2. Покажем, что можно получить разность, равную 2.

Для этого докажем по индукции, что имеется последовательность ходов, при которой после любого нечётного хода записанные числа отличаются на 2 (при этом никогда не появятся два равных числа, поскольку на чётных ходах возникают числа разной чётности).

База индукции показана в пункте а). Предположим, что для нечётного k на k-м ходу получена пара чисел (a,b), отличающихся на 2. Делаем следующие два хода:

$$(a,b) \to (a+b, 2b-1) \to (a+3b-1, 2a+2b-1).$$

Тогда модуль разности чисел, полученных после $(k+2)$-го хода,

$$|(a+3b-1) - (2a+2b-1)| = |b-a| = 2.$$

В частности, на 513-м ходу можно получить два числа, отличающиеся на 2.

Задача 8. Ответ: а) см. ниже; б) нет; в) 6.

Решение. а) Можно последовательно стереть следующие тройки: $(1, 2, 30)$; $(3, 4, 25)$; $(5, 6, 20)$; $(7, 8, 15)$; $(9, 10, 11)$.

б) Предположим, что сделано 10 ходов, то есть стёрты все 30 чисел. Тогда на каких-то ходах были стёрты тройки $(a, b, 30)$ и $(c, d, 29)$. С одной стороны, сумма S чисел в этих тройках не превосходит $34 + 33 = 67$. С другой стороны,

$$S = (a + b + c + d) + 30 + 29 \geqslant (1 + 2 + 3 + 4) + 30 + 29 = 69.$$

Полученное противоречие показывает, что 10 ходов сделать нельзя.

в) Шесть ходов сделать можно: $(1, 16, 17)$; $(2, 14, 15)$; $(3, 12, 13)$; $(4, 10, 11)$; $(5, 8, 9)$; $(6, 7, 20)$.

Предположим, что сделано семь ходов. Пусть S — сумма чисел в стёртых тройках. С одной стороны,

$$S \leqslant 34 + 33 + 32 + 31 + 30 + 29 + 28 = 217.$$

С другой стороны, всего стёрто 21 число, так что

$$S \geqslant 1 + 2 + \ldots + 21 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

Пришли к противоречию. Значит, семь ходов сделать нельзя.

Задача 9. Ответ: а) 1, 24, 24, 1; б) да; в) 70.

Решение. По условию $2a_2 > a_1 + a_3$, $2a_3 > a_2 + a_4$, $\ldots$, что можно переписать как

$$a_2 - a_1 > a_3 - a_2 > a_4 - a_3 > \ldots$$

Иными словами, разности $d_n = a_{n+1} - a_n$ образуют убывающую последовательность целых чисел: $d_1 > d_2 > d_3 > \ldots$.

а) Пример: 1, 24, 24, 1.

б) Пример: 1, 3, 4, 4, 3, 1.

в) Без ограничения общности можно считать, что $a_1 \leqslant a_{10}$ (в противном случае перенумеруем последовательность в обратном порядке — это не изменит её сумму). Так как разности d_n убывают, имеем:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d_1,\\
a_3 &= a_2 + d_2 \leqslant (a_1 + d_1) + (d_1 - 1) = a_1 + 2d_1 - 1,\\
a_4 &= a_3 + d_3 \leqslant (a_1 + 2d_1 - 1) + (d_1 - 2) = a_1 + 3d_1 - (1 + 2),\\
a_5 &\leqslant a_1 + 4d_1 - (1 + 2 + 3),\\
&\ldots\\
a_{10} &\leqslant a_1 + 9d_1 - (1 + 2 + 3 + \ldots + 8) = a_1 + 9d_1 - 36.
\end{aligned}$$

Таким образом, $a_1 \leqslant a_{10} \leqslant a_1 + 9d_1 - 36$, откуда $d_1 \geqslant 4$. Поэтому $d_2 \geqslant 3$, $d_3 \geqslant 2$, $\ldots$, $d_k \geqslant 5 - k$, $\ldots$, $d_9 \geqslant -4$. Кроме того, разумеется, $a_1 \geqslant 1$.

Теперь для суммы нашей последовательности имеем оценку:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} &= a_1 + (a_1 + d_1) + (a_1 + d_1 + d_2) + \ldots + (a_1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_9) =\\
&= 10a_1 + 9d_1 + 8d_2 + \ldots + 2d_8 + d_9 \geqslant\\
&\geqslant 10 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + (-4) = 70.
\end{aligned}$$

Оценка точна: последовательность 1, 5, 8, 10, 11, 11, 10, 8, 5, 1 удовлетворяет условию задачи и её сумма равна 70.

Задача 10. Ответ: а) да; б) да; в) 51.

Решение. Обозначим $R(x)$ результат округления числа x. Тогда $R(x)=x+\alpha$, где $\alpha\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

а) Пусть шахматист сыграл 6 партий и одержал ровно одну победу. Тогда показатель побед равен $R\left(\frac{100\cdot 1}{6}\right)=R\left(16\frac{2}{3}\right)=17$.

б) Предположим, что из 1000 партий шахматист 995 выиграл и 5 сыграл вничью. Тогда показатель побед равен $R(99{,}5)=100$, показатель ничьих равен $R(0{,}5)=1$ и показатель поражений равен $100-(100+1)=-1$.

После выигрыша следующей, 1001-й партии показатель побед не изменится:

$$R\left(\frac{100\cdot 996}{1001}\right)=R\left(99\frac{501}{1001}\right)=100,$$

а показатель ничьих уменьшится на единицу: $R\left(\frac{100\cdot 5}{1001}\right)=0$. Тогда показатель поражений будет равен нулю, увеличившись на единицу по сравнению с предыдущей ситуацией.

в) Пусть шахматист сыграл n партий, из которых a партий выиграл, b партий свёл вничью и c партий проиграл ($a+b+c=n$). Если показатель поражений равен 1, то сумма показателей побед и ничьих равна 99:

$$R\left(\frac{100a}{n}\right)+R\left(\frac{100b}{n}\right)=99. \tag{1}$$

Имеем:

$$R\left(\frac{100a}{n}\right)=\frac{100a}{n}+\alpha,\quad R\left(\frac{100b}{n}\right)=\frac{100b}{n}+\beta;\quad \alpha,\beta\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right].$$

Тогда из (1) получим

$$99=\frac{100a}{n}+\alpha+\frac{100b}{n}+\beta=\frac{100(n-c)}{n}+\alpha+\beta=100+\alpha+\beta-\frac{100c}{n},$$

откуда

$$n=\frac{100c}{1+\alpha+\beta}.$$

Учитывая, что $c\geqslant 1$ и $\alpha,\beta\leqslant\frac{1}{2}$, получаем оценку $n\geqslant 50$.

Если $n=50$, то равенство (1) даёт

$$99=R(2a)+R(2b)=2a+2b.$$

Это невозможно, поскольку левая часть — нечётное число, а правая — чётное.

При $n=51$ из (1) имеем:

$$R\left(\frac{100a}{51}\right)+R\left(\frac{100b}{51}\right)=99. \tag{2}$$

Такое возможно при $a=38$ и $b=12$, в чём нетрудно убедиться непосредственным вычислением.

Следовательно, наименьшее возможное количество партий равно 51.

► Как найти пару чисел a и b, удовлетворяющую уравнению (2)? Заметим, что $a+b=50$, поскольку оценка на n получена при $c=1$. Имеем:

$$99=\frac{100a}{51}+\alpha+\frac{100b}{51}+\beta=\frac{100\cdot 50}{51}+\alpha+\beta,$$

откуда $\alpha+\beta=\frac{49}{51}$. С учётом верхней границы для α и β (равной $1/2$) имеем единственный с точностью до перестановки случай $\alpha=\frac{25}{51}$, $\beta=\frac{24}{51}$. Тогда

$$m=R\left(\frac{100a}{51}\right)=\frac{100a}{51}+\frac{25}{51},$$

откуда $51m=100a+25$. Число $100a+25$ делится на $25=5^2$ и на $51=3\cdot 17$, то есть на их произведение $25\cdot 51=1275$. Подходит $1275\cdot 3=3825$, так что $a=38$. ◄

Задача 11. Ответ: а) 339; б) нет; в) $\frac{931}{27}$.

Решение. а) Годится число 339:

$$\frac{339}{3\cdot 3\cdot 9}=\frac{113}{27}.$$

► Пример легко строится «с конца» — берём дробь $113/27$ и умножаем числитель и знаменатель на 2, 3, ..., пока не получим нужное. ◄

б) Допустим, что частное равняется $\frac{125}{27}$. Тогда трёхзначное число равно $125k$ с нечётным k (иначе оно оканчивается на нуль), а произведение его цифр равно $27k$. Но трёхзначных чисел указанного вида всего четыре, а именно 125, 375, 625, 875. Ни у одного из них произведение цифр не делится на 27. Противоречие.

в) Пусть отношение трёхзначного числа к произведению его цифр есть несократимая дробь со знаменателем 27. Если произведение цифр больше 27, то отношение не превосходит дроби $\frac{999}{54}<20$. Для числа 931 отношение равно несократимой дроби $\frac{931}{27}>20>\frac{999}{54}$. Значит, максимум данного отношения достигается для числа из промежутка $[931;999]$ с произведением цифр, равным 27. Но в указанном промежутке только лишь число 931 имеет произведение цифр 27 (у всех остальных чисел этого промежутка, не имеющих в записи нулей, произведение цифр, очевидно, больше 27). Следовательно, наибольшее значение нашего отношения равно $\frac{931}{27}$.

Задача 12. Ответ: в) $\frac{130}{29}$.

Решение. Сумма всех чисел равна 120. Среднее арифметическое всех чисел равно 4.

а) К первой группе отнесём все пятёрки, ко второй — все остальные числа. Тогда $A=5$, $B=3{,}5$ и

$$\frac{A+B}{2}=\frac{8{,}5}{2}>4.$$

б) Пусть в первую группу вошли числа $x_1, \ldots, x_{15}$, во вторую — числа $x_{16}, \ldots, x_{30}$. Тогда

$$15(A+B)=15A+15B=(x_1+\ldots+x_{15})+(x_{16}+\ldots+x_{30})=120,$$

откуда

$$\frac{A+B}{2}=4.$$

в) Если в каждой группе поровну троек и пятёрок, то $A=B=4$ и $(A+B)/2=4$. (Этот случай, таким образом, интереса не представляет, поскольку в пункте а) был приведён пример с бо́льшим значением $(A+B)/2$.)

Предположим, что в одной из групп (скажем, в первой) троек больше, чем пятёрок. Тогда $A<4$. Поскольку количество чисел в первой группе не более 29, величина A отличается от 4 не менее чем на $1/29$. Учитывая также, что $B\leqslant 5$, имеем оценку:

$$\frac{A+B}{2}\leqslant\frac{\left(4-\frac{1}{29}\right)+5}{2}=\frac{130}{29}.$$

Эта оценка точна: равенство, как легко проверить, достигается в случае, когда вторая группа состоит из одной пятёрки.

Задача 13. Ответ: а) 5, 0, 2, 3, 0, 0; б) нет; в) 2,8.

Решение. Сразу же отметим, что

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5M_1 = 5, \quad (3)$$
$$a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5M_2 = 10. \quad (4)$$

Кроме того, обозначим

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 = 5M_3 = S. \quad (5)$$

Вычитая из равенства (4) равенство (3), получим

$$a_1 - a_2 = 5.$$

Аналогично, вычитая (3) из (5), получим

$$a_1 - a_3 = S - 5.$$

а) Если $M_3 = 1{,}6$, то $S = 8$ и $a_1 - a_3 = 3$. Пример легко строится: $a_1 = 5$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$. (Так можно построить много других примеров.)

б) Пусть $M_3 = 3$, тогда $S = 15$ и $a_1 - a_3 = 10$. Противоречие, поскольку $0 \leqslant a_1, a_3 \leqslant 9$.

в) Имеем: $S - 5 = a_1 - a_3 \leqslant 9$, откуда $S \leqslant 14$ и $M_3 = S/5 \leqslant 2{,}8$. Оценка точна, поскольку значение $S = 14$ достигается для набора $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$. (Этот пример легко строится из тех же соображений, что и в первом пункте.)

Задача 14. Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Решение. а) Будем удалять числа из набора по одному. Сумма чисел исходного набора больше 110, а после удаления любого числа сумма оставшихся чисел уменьшается. Пусть после удаления числа x сумма впервые стала меньше или равна 110. Поскольку $x \leqslant 11$, сумма оставшихся чисел будет больше 99.

б) Приведём пример, показывающий, что это не так. Рассмотрим набор из 11 чисел $a = 10\frac{1}{11}$. Сумма всех чисел в наборе равна $11a = 111 > 110$, поэтому данный набор удовлетворяет условию задачи. Однако сумма любого количества чисел набора, меньшего 11, не превосходит $10a = \frac{1110}{11} = 100\frac{10}{11} < 101$.

в) Назовём число *большим*, если оно принадлежит промежутку $(10; 11]$. Если же число не превосходит 10, то назовём его *маленьким*.

Если в наборе найдутся 10 больших чисел, то их и возьмём: сумма данных чисел окажется в нужном промежутке $(100; 110]$.

Если в наборе имеется не более 9 больших чисел, то их сумма не превосходит 99. Следовательно, набор содержит маленькие числа. Будем удалять из набора маленькие числа по одному. Сумма набора, превосходящая вначале 110, с каждым удалённым числом уменьшается, и наконец после удаления маленького числа x впервые станет меньше или равна 110. Поскольку $x \leqslant 10$, сумма оставшихся чисел будет больше 100.

Задача 15. Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Решение. а) Заметим, что множество $A = \{200, 201, \ldots, 299\}$ можно разбить на 50 пар с равной суммой чисел в каждой паре: $(200, 299)$, $(201, 298)$, …, $(249, 250)$. Числа из первых 25 пар пусть образуют множество A_1, остальные числа — множество A_2. Тогда $A = A_1 \cup A_2$, причём суммы чисел в подмножествах A_1 и A_2 равны. Следовательно, A — хорошее множество.

б) *Первый способ.* Заметим, что все числа множества $B = \{2, 4, 8, \ldots, 2^{100}\}$, кроме 2, делятся на 4. Разобьём множество B на два каких-либо подмножества. Будем считать, что число 2 находится во втором подмножестве. Тогда сумма чисел первого подмножества делится на 4, а сумма чисел второго — нет. Значит, множество B не является хорошим.

Второй способ. Разобьём множество B на два каких-либо подмножества. Будем считать, что число 2^{100} находится в первом подмножестве. Тогда сумма чисел первого подмножества не меньше, чем 2^{100}, а сумма чисел второго подмножества не больше, чем

$$2 + 4 + \ldots + 2^{99} = 2^{100} - 1.$$

Значит, суммы чисел в обоих подмножествах не могут быть равны, и поэтому множество B не является хорошим.

в) Множество не может быть хорошим, если сумма его чисел нечётна. Поэтому для того чтобы множество было хорошим, необходимо, чтобы оно содержало чётное количество нечётных чисел.

Хорошее четырёхэлементное подмножество множества $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ может содержать ровно два или четыре нечётных числа. Два числа из пяти нечётных можно выбрать $C_5^2 = 10$ способами. Соответственно имеем десять подмножеств:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{1, 2, 4, 5\}; && A_6 = \{2, 4, 5, 9\};\\
&A_2 = \{1, 2, 4, 7\}; && A_7 = \{2, 4, 5, 11\};\\
&A_3 = \{1, 2, 4, 9\}; && A_8 = \{2, 4, 7, 9\};\\
&A_4 = \{1, 2, 4, 11\}; && A_9 = \{2, 4, 7, 11\};\\
&A_5 = \{2, 4, 5, 7\}; && A_{10} = \{2, 4, 9, 11\}.
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что хорошими являются только шесть из них: A_1, A_2, A_5, A_7, A_8 и A_{10}.

Четыре числа из пяти нечётных можно выбрать $C_5^4 = 5$ способами. Соответственно имеем пять подмножеств:

$$\begin{aligned}
&B_1 = \{1, 5, 7, 9\};\\
&B_2 = \{1, 5, 7, 11\};\\
&B_3 = \{1, 5, 9, 11\};\\
&B_4 = \{1, 7, 9, 11\};\\
&B_5 = \{5, 7, 9, 11\}.
\end{aligned}$$

Хорошими являются только два из них: B_2 и B_5.

Всего, стало быть, множество M имеет 8 хороших четырёхэлементных подмножеств.

Задача 16. Ответ: а) да; б) нет; в) 98.

Решение. а) Подойдут прогрессии 1, 4, 7, 10, … и 1, 3, 5, 7,… В самом деле, $1 \cdot 1 + 7 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 3$.

► Покажем, как найти пример. Пусть a — второй член прогрессии с разностью x, b — второй член прогрессии с разностью y. Тогда должно выполняться равенство

$$(a - x)(b - y) + (a + x)(b + y) = 3ab \;\Rightarrow\; 2xy = ab.$$

Теперь можно подобрать $x = 3$, $y = 2$, $a = 4$, $b = 3$. ◄

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда найдутся такие натуральные числа x, y, $a > 2x$ и $b > 2y$, что

$$(a-2x)(b-2y) + 2(a+x)(b+y) = 3ab.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим $6xy = 0$. Противоречие.

в) Как и в предыдущем пункте, пусть $a > 2x$ и $b > 2y$ — третьи члены прогрессий с разностями x и y соответственно. По условию,

$$(a-2x)(b-2y) + 2(a+x)(b+y) \leqslant 300 \;\Rightarrow\; 3ab + 6xy \leqslant 300 \;\Rightarrow\; ab \leqslant 100 - 2xy.$$

Следовательно, $ab \leqslant 98$. В случае прогрессий $5, 6, 7, \ldots$ и $12, 13, 14, \ldots$, произведение третьих членов равно 98.

Задача 17. Ответ: а) да; б) нет; в) 2.

Решение. а) Таковы, например, прогрессии $2, 8, 14, 20, \ldots$ и $1, 2, 3, 4, \ldots$ Для них $a_1/b_1 = 2$, $a_2/b_2 = 4$, $a_4/b_4 = 5$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда найдутся натуральные числа a, b, x, y такие, что

$$\frac{a}{b} = k, \quad \frac{b+y}{a+x} = l, \quad \frac{a+3x}{b+3y} = m$$

с различными натуральными k, l, m. Из первого равенства имеем $a = kb$; подставляем это во второе и третье равенства:

$$b + y = (kb + x)l, \quad kb + 3x = (b + 3y)m.$$

Исключая отсюда y, после некоторых преобразований получим:

$$b(3klm - k - 2m) + 3x(lm - 1) = 0. \tag{6}$$

Заметим, что

$$3klm - k - 2m \geqslant 3lm - 1 - 2m = 3(l-1)m + m - 1 > 0,$$

а также

$$lm - 1 > 0,$$

поскольку l и m — различные натуральные числа. Тогда в (6) имеем сумму двух положительных слагаемых, равную нулю. Противоречие.

в) Переформулируем задачу в более удобном виде. Пусть x, y, $a > x$ и $b > y$ — натуральные числа, такие, что

$$\frac{a-x}{b-y} = k, \quad \frac{a}{b} = l, \quad \frac{a+8x}{b+8y} = m \tag{7}$$

с различными натуральными k, l, m. Требуется найти минимально возможное значение l.

Пусть $l = 1$. Тогда $a = b$, откуда

$$\frac{b-x}{b-y} = k, \quad \frac{b+8x}{b+8y} = m.$$

Из первого равенства следует $b - x > b - y$, то есть $x < y$; аналогично, из второго равенства следует $x > y$ — противоречие. Следовательно, $l \geqslant 2$.

Равенство $l = 2$ достигается, например, для прогрессий $a_{n+1} = 3+5n$ и $b_{n+1} = 3+n$. В самом деле, $a_1/b_1 = 3/3 = 1$, $a_2/b_2 = 8/4 = 2$, $a_{10}/b_{10} = 48/12 = 4$.

► Пример строится, если положить $k = 1$, $l = 2$ и $m = 4$ в равенствах (7). Существуют и другие примеры. ◄

Задача 18. Ответ: а) да; б) нет; в) 66.

Решение. а) Такова, например, прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, ...

б) Числа, кратные 100, будем для краткости называть *хорошими*. Предположим, что арифметическая прогрессия содержит хорошие числа. Покажем, что хорошие числа образуют подпрогрессию данной прогрессии.

Разность d нашей прогрессии является, очевидно, числом натуральным. Пусть a_i — первое из хороших чисел прогрессии, и a_{i+j} — другое хорошее число. Тогда из равенства $a_{i+j} = a_i + jd$ следует, что число jd хорошее: $jd = 100t$ с некоторым натуральным t.

Пусть $m = (100, d)$ — наибольший общий делитель чисел 100 и d, то есть $100 = mp$ и $d = mq$ с некоторыми взаимно простыми p и q. Тогда $jmq = mpt$ и $jq = pt$, так что jq делится на p. Ввиду взаимной простоты чисел p и q отсюда следует, что j делится на p: $j = kp$ с некоторым целым неотрицательным k.

Значит, все хорошие члены прогрессии имеют вид a_{i+kp}, где $p = 100/(100, d)$. Иными словами, хорошие числа *идут с периодом* p, то есть сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом a_i и разностью pd.

Отсюда можно заключить, что среди любых p последовательных членов исходной прогрессии ровно один — хороший.

Будем отмечать в нашей прогрессии a_1, a_2, ..., a_{49} последовательные отрезки длиной p: $(a_1, \ldots, a_p)$; $(a_{p+1}, \ldots, a_{2p})$ и т. д.; заключительный отрезок длиной не больше p отметим тоже. Если $p \leqslant 4$, то мы отметим не менее 13 таких отрезков, в первых 12 из которых найдётся 12 хороших чисел. Если же $p \geqslant 5$, то мы отметим не более 10 отрезков, и тогда в них найдётся не более 10 хороших чисел.

Следовательно, среди первых 49 членов арифметической прогрессии не могут найтись ровно 11 хороших чисел.

в) Как мы видели выше, хорошие члены арифметической прогрессии идут с некоторым периодом $p = 100/(100, d)$. Заметим, что $p \leqslant 100$.

Рассмотрим теперь N последовательных членов арифметической прогрессии. Сколько среди них может быть хороших чисел?

Снова разбиваем наш числовой отрезок длиной N на последовательные отрезки длиной p. Всего получится $[N/p]$ таких отрезков, в каждом из которых окажется ровно одно хорошее число. Если N не делится на p, то останется дополнительный отрезок (его длина равна остатку от деления N на p), в который хорошее число может как попасть, так и не попасть. Следовательно, среди N последовательных членов прогрессии может быть $[N/p]$ или $[N/p] + 1$ хороших чисел.

► Снова вернёмся к пункту б). Имеем: $[49/4] = 12$ и $[49/5] + 1 = 10$, так что разместить ровно 11 хороших чисел никак не выйдет. ◄

Среди $2n$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ может быть $[2n/p]$ или $[2n/p]+1$ хороших. Среди $3n$ чисел a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n} может быть $[3n/p]$ или $[3n/p] + 1$ хороших. Поскольку $[2n/p] \leqslant [3n/p]$, требуется выполнение неравенства $[2n/p] + 1 > [3n/p]$ или, что то же самое, равенства $[2n/p] = [3n/p]$.

Рассмотрим уравнение $[2x] = [3x]$. Числа $x = 2/3$ и $x = 1$ не являются его корнями. Если $2/3 < x < 1$, то $4/3 < 2x < 2$ и $2 < 3x < 3$ —решений нет. Если же $x > 1$, то $2x < 2x + 1 < 3x$, и поэтому $[2x] < [2x + 1] \leqslant [3x]$ — снова решений нет. Поэтому все решения рассматриваемого уравнения удовлетворяют неравенству $x < 2/3$.

Итак, $n/p < 2/3$, то есть $n < 2p/3 \leqslant 2 \cdot 100/3$, откуда получаем оценку $n \leqslant 66$. Покажем, что $n = 66$ годится. Рассмотрим прогрессию

$$\underbrace{100, 101, \ldots, 231}_{132}, \underbrace{232, 233, \ldots, 329}_{198}.$$

Среди первых $132 = 2 \cdot 66$ её членов есть два хороших числа 100 и 200, а среди следующих $198 = 3 \cdot 66$ членов — лишь одно хорошее число 300.

Задача 19. Ответ: а) да; б) нет; в) 200/81.

Решение. а) Годится, например, прогрессия 1, 3, 5, … В самом деле, имеем:

$$S_{10} = \frac{1+19}{2} \cdot 10 = 100 = 100 \cdot 1.$$

► Покажем, как найден пример. Пусть d — разность прогрессии. Тогда $S_{10} = (2a_1 + 9d) \cdot 5$, так что

$$(2a_1 + 9d) \cdot 5 = 100a_1 \;\Rightarrow\; 2a_1 + 9d = 20a_1 \;\Rightarrow\; d = 2a_1.$$

Полагаем $a_1 = 1$, откуда $d = 2$. ◄

б) Пусть выполнено $S_{10} = 50S_2$. Обозначим через d разность прогрессии. Имеем:

$$(2a_1 + 9d) \cdot 5 = 50(2a_1 + d) \;\Rightarrow\; 2a_1 + 9d = 20a_1 + 10d \;\Rightarrow\; d = -18a_1.$$

Значит, $d < 0$ (поскольку a_1 — число натуральное) и прогрессия является убывающей. Но в таком случае она не может целиком состоять из натуральных чисел. Противоречие.

в) Обозначим минимизируемую величину через y. Имеем:

$$y = \frac{S_5^2}{S_1 S_{10}} = \frac{(a_1 + 2d)^2 \cdot 25}{a_1(2a_1 + 9d) \cdot 5} = 5t,$$

где

$$t = \frac{(a_1 + 2d)^2}{a_1(2a_1 + 9d)} = \frac{a_1^2 + 4a_1 d + 4d^2}{2a_1^2 + 9a_1 d} = \frac{1 + 4x + 4x^2}{2 + 9x},$$

где $x = d/a_1$. Отсюда

$$4x^2 + (4 - 9t)x + 1 - 2t = 0. \tag{8}$$

Дискриминант квадратного уравнения (8) должен быть неотрицательным:

$$0 \leqslant (4 - 9t)^2 - 16(1 - 2t) = 81t^2 - 40t,$$

откуда с учётом положительности t имеем оценку $t \geqslant \frac{40}{81}$ и, следовательно, $y \geqslant \frac{200}{81}$.

Покажем, что оценка точна. Рассмотрим прогрессию 18, 19, 20, … Для неё, как нетрудно проверить, $S_5 = 100$, $S_{10} = 45 \cdot 5$, так что

$$y = \frac{100 \cdot 100}{18 \cdot 45 \cdot 5} = \frac{200}{81}.$$

Итак, $y_{\min} = 200/81$.

► Пример найден с помощью уравнения (8). При $t = 40/81$ дискриминант этого уравнения обращается в нуль, поэтому оно имеет единственный корень

$$x = \frac{9t - 4}{8} = \frac{9 \cdot \frac{40}{81} - 4}{8} = \frac{1}{18}.$$

Отсюда $d/a_1 = 1/18$ и $a_1 = 18d$, после чего остаётся положить $d = 1$. ◄

Задача 20. Ответ: а) 1359 и 1362; б) нет; в) 11.

Решение. а) Например, 1359 и 1362.

► Понятно, что при сложении интересного числа и тройки нужен переход через десяток, чтобы снова получилось интересное число. Из этого соображения и конструируется пример. ◄

б) Пусть $x = \overline{abcd}$ — интересное число, и $y = x + 111$ — тоже интересное число. Тогда среди цифр числа x нет девятки. В самом деле, если это не так, то первая девятка справа даст цифру 0 в числе y — вопреки определению интересного числа. Следовательно, число y имеет вид

$$y = \overline{a(b+1)(c+1)(d+1)}. \tag{9}$$

Далее можно рассуждать двумя способами.

Первый способ. Очевидно, что наибольшая цифра интересного числа (равная сумме трёх остальных) превышает наибольшую из остальных цифр как минимум на 2. Из (9) следует тогда, что наибольшая цифра числа y находится в том же разряде, что и в числе x.

Если наибольшей цифрой числа x является a, то $a = b + c + d$. Но тогда a является и наибольшей цифрой числа y, так что $a = (b + 1) + (c + 1) + (d + 1)$. Противоречие.

Если наибольшей цифрой числа x является b, то $b = a + c + d$. В этом случае $b + 1$ является наибольшей цифрой числа y, так что $b + 1 = a + (c + 1) + (d + 1)$. Противоречие.

Аналогично к противоречию приходим и в двух остальных случаях, когда наибольшей цифрой числа x является c или d.

Второй способ. Заметим, что сумма цифр интересного числа обязательно чётна. В самом деле, если, например, $a = b + c + d$, то $a + b + c + d = 2a$.

Но если $a+b+c+d$ чётно, то сумма цифр числа y, равная $a+b+c+d+3$, окажется нечётной. Значит, y не является интересным числом. Противоречие.

Следовательно, два интересных числа не могут различаться на 111.

в) Интересное число 2226 делится на 2, 3, 7. Интересное число 1135 делится на 5. Покажем, что интересное число не может делиться на 11.

Пусть $x = \overline{abcd}$ — интересное число. Предположим, что оно делится на 11. Тогда без ограничения общности можно считать, что d — наибольшая из цифр этого числа (иначе можно рассмотреть одно из интересных чисел $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$ или $\overline{dabc}$, каждое из которых также делится на 11). В таком случае имеем:

$$x = 1000a + 100b + 10c + d = 1000a + 100b + 10c + (a + b + c) = 1001a + 101b + 11c.$$

Слагаемые $1001a$ и $11c$ делятся на 11, поэтому и число $101b$ делится на 11. Однако 101 не делится на 11 — значит, цифра b делится на 11. Но это невозможно, поскольку $b \neq 0$.

Итак, 11 — наименьшее простое число, на которое не может делиться интересное число.

Задача 21. Ответ: а) да; б) нет; в) 11.

Решение. а) Пример: *1423*, 1424, …, 1431, *1432*. Есть и другие примеры, ищутся они легко.

б) Пусть $x = \overline{abcd}$ и $y = \overline{efgh}$ — очень счастливые числа. Тогда

$$x = 1000a + 100b + 10c + d = 1000a + 100b + 9c + (c + d) =$$
$$= 1000a + 100b + 9c + (a + b) = 1001a + 101b + 9c.$$

Аналогично $y = 1001e + 101f + 9g$.

Предположим, что $x - y = 2015$. Отсюда, в частности, следует, что $a > e$. Кроме того, имеем:

$$2015 = 1001(a-e) + 101(b-f) + 9(c-g). \tag{10}$$

Если $a - e = 1$, то из (10) получаем

$$2015 = 1001 + 101(b-f) + 9(c-g) \leqslant 1001 + 101 \cdot 9 + 9 \cdot 9 = 1991$$

(поскольку разность двух цифр не превосходит 9). Противоречие.

Если $a - e = 2$, то из (10) получаем $2015 = 2002 + 101(b-f) + 9(c-g)$, то есть

$$101(b-f) + 9(c-g) = 13.$$

Так как $|9(c-g)| \leqslant 81$, отсюда с необходимостью имеем $b = f$. Но тогда $9(c-g) = 13$ — противоречие, ибо 13 не делится на 9.

Если $a - e = 3$, то $2015 = 3003 + 101(b-f) + 9(c-g)$, то есть

$$101(f-b) + 9(g-c) = 988.$$

Отсюда с необходимостью $f - b = 9$, так что $909 + 9(g-c) = 988$. Противоречие: левая часть делится на 9, а правая — нет.

Наконец, если $a - e \geqslant 4$, то

$$2015 \geqslant 4004 + 101(b-f) + 9(c-g) \geqslant 4004 + 101 \cdot (-9) + 9 \cdot (-9) = 3014.$$

И тут пришли к противоречию.

Следовательно, разность двух очень счастливых чисел не может равняться 2015.

в) Очень счастливое число 5160 делится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10. Очень счастливое число 4536 делится на 9. Очень счастливое число 9128 делится на 7.

Покажем, что очень счастливое число не может делиться на 11. Рассмотрим очень счастливое число $\overline{abcd} = 1001a + 101b + 9c$. Пусть оно делится на 11. Тогда, поскольку 1001 делится на 11, оказывается кратным 11 число

$$101b + 9c = 110b - 9b + 9c = 11 \cdot 10b + 9(c-b).$$

Отсюда следует, что $c - b$ делится на 11. Но это невозможно, так как цифры b и c по условию различны.

Итак, наименьшее натуральное число, на которое не может делиться очень счастливое число, равно 11.

Задача 22. Ответ: а) да; б) да; в) 7.

Решение. а) Пусть тест писали двое и набрали вначале 0 и 80 баллов. Оба не сдали, и их средний балл равен 40. После добавления баллов результаты стали 7 и 87. Не сдавшим оказался только первый, средний балл не сдавших равен $7 < 40$.

б) Пусть тест писали трое и получили вначале 0, 80 и 100. Средний балл не сдавших — 40, сдавших — 100. После добавления баллов результаты стали 7, 87 и 107. Теперь средний балл не сдавших — $7 < 40$, сдавших — $97 < 100$.

в) Пусть тест писали x человек. Они набрали вначале $85x$ баллов. После добавления 7 баллов каждому человеку общая сумма баллов стала равна $85x + 7x = 92x$.

Предположим, что после добавления баллов тест сдали n человек. Тогда

$$92x = 100n + 72(x - n) \;\Rightarrow\; 20x = 28n \;\Rightarrow\; 5x = 7n.$$

Следовательно, x делится на 7 и потому $x \geqslant 7$.

Покажем, что для 7 человек указанная в условии ситуация может реализоваться. Пусть семеро участников получили вначале 100, 100, 100, 85, 80, 70, 60. Средний балл всех участников:

$$\frac{100 + 100 + 85 + 80 + 70 + 60}{7} = 85.$$

Средний балл не сдавших:

$$\frac{80 + 70 + 60}{3} = 70.$$

После добавления баллов получились результаты 107, 107, 107, 92, 87, 77, 67. Средний балл сдавших:

$$\frac{107 + 107 + 107 + 92 + 87}{5} = 100,$$

а средний балл не сдавших: $(77 + 67)/2 = 72$.

► Как найден этот пример? Пусть семеро участников вначале получили баллы a, b, c, d, e, f и g (в порядке убывания), которые потом превратились в $a + 7$, $b + 7$, $c + 7$, $d + 7$, $e + 7$, $f + 7$ и $g + 7$.

Наряду с $x = 7$ нам известно значение $n = 5$, то есть пятеро в итоге оказались сдавшими. Отсюда

$$(f + 7) + (g + 7) = 2 \cdot 72 \;\Rightarrow\; f + g = 130,$$

а также

$$(a + 7) + (b + 7) + (c + 7) + (d + 7) + (e + 7) = 5 \cdot 100 \;\Rightarrow\; a + b + c + d + e = 465.$$

Поищем пример в ситуации, когда вначале было четверо сдавших. Тогда

$$e + f + g = 3 \cdot 70 = 210,$$

и, стало быть,

$$a + b + c + d = 7 \cdot 85 - 210 = 385.$$

Из написанных уравнений легко находим $e = 80$, а значения остальных переменных можно подобрать как угодно. ◄

Задача 23. Ответ: а) да; б) нет; в) 30.

Решение. а) Рассмотрим числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (это числа Фибоначчи; каждое, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих). Ясно, что никакие три из них не могут являться длинами сторон треугольника.

б) Рассмотрим числа $a < b < c < d$. Длина гипотенузы не может быть равна a или b. Число c может быть длиной гипотенузы лишь в одном треугольнике (с катетами a и b).

Число d может быть длиной гипотенузы также лишь в одном треугольнике. Действительно, из трёх возможных пар (a, b), (b, c) и (a, c) любые две содержат одинаковое число; поэтому если (a, b, d), (b, c, d) и (a, c, d) — длины сторон прямоугольных треугольников, то любые два из них равны по гипотенузе и катету. Это противоречит тому, что числа a, b, c, d различны.

в) Продолжим рассуждения пункта б). Две пары чисел (a, b) и (c, d) назовём *непересекающимися*, если все числа a, b, c, d различны. Заметим, что если у двух неравных прямоугольных треугольников равны гипотенузы, то пары их катетов — непересекающиеся.

Пусть имеются числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Количество T_n прямоугольных треугольников с гипотенузой x_n, которые можно составить из отрезков этих длин, не превосходит количества непересекающихся пар, которые можно составить из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Но число таких пар равно, очевидно, $\left[\frac{n-1}{2}\right]$; следовательно, $T_n \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Рассмотрим теперь числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_{12}$. Количество T прямоугольных треугольников, которое можно составить из отрезков этих длин, равно сумме количеств прямоугольных треугольников с гипотенузами $x_3, x_4, \ldots, x_{12}$ и удовлетворяет оценке

$$T = T_3 + T_4 + \ldots + T_{12} \leqslant \sum_{n=3}^{12} \left[\frac{n-1}{2}\right] = 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5 = 30.$$

Оценка точна: равенство достигается, например, для набора $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{12}$. Действительно, в указанном наборе имеем

- 10 отличных троек $(1, \sqrt{k}, \sqrt{k+1}\,)$ при $k = 2, 3, \ldots, 11$;
- 8 отличных троек $(2, \sqrt{k}, \sqrt{k+2}\,)$ при $k = 3, 4, \ldots, 10$;
- 6 отличных троек $(3, \sqrt{k}, \sqrt{k+3}\,)$ при $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9$;
- 4 отличных тройки $(4, \sqrt{k}, \sqrt{k+4}\,)$ при $k = 5, 6, 7, 8$;
- 2 отличных тройки $(5, \sqrt{k}, \sqrt{k+5}\,)$ при $k = 6, 7$.

Задача 24. Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

Решение. а) Можно обойтись даже тремя переливаниями. В самом деле:
1) перельём из четвёртой бочки в первую 19 литров;
2) перельём из четвёртой бочки во вторую 16 литров;
3) перельём из четвёртой бочки в третью 8 литров.
В результате во всех бочках станет по 48 литров.

б) Предположим, что в первых шести бочках находится по 1 литру воды, а в седьмой — 8 литров. После выравнивания в бочках станет по 2 литра воды; значит, в каждую из первых шести бочек надо наливать воду. Это требует не менее 6 переливаний, так что пятью переливаниями в данном случае не обойдёшься.

в) Аналогично, пусть в первых 25 бочках находится по 1 литру, а в 26-й — 27 литров воды. После выравнивания в бочках станет по 2 литра воды; значит, в каждую из первых 25 бочек надо наливать воду. Это требует не менее 25 переливаний. Значит, 24 переливаний может не хватить.

Покажем, что 25 переливаний гарантированно хватает. Пусть m — среднее арифметическое объёмов воды во всех 26 бочках. Если в бочке находится m литров воды, то называем такую бочку *хорошей*.

Если все бочки — хорошие, то ничего переливать не надо. В противном случае найдутся две бочки, в одной из которых больше m литров, а в другой — меньше m литров. Возьмём эти бочки и перельём из одной в другую так, чтобы какая-то из них стала хорошей.

После каждого такого шага число хороших бочек увеличивается. Поэтому требуется не более 25 переливаний, чтобы получить 25 хороших бочек; но тогда и оставшаяся 26-я бочка — хорошая.

Задача 25. Ответ: а) да; б) нет; в) 20,5.

Решение. а) Пусть на доске написано двадцать пять чисел 5 и пять чисел 41. Сумма написанных чисел равна $25 \cdot 5 + 5 \cdot 41 = 330$, их среднее арифметическое равно 11.

После уменьшения чисел вдвое и стирания чисел, меньших 3, на доске останется пять чисел $41/2 = 20{,}5$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $20{,}5 > 16$.

б) Пусть на доске написано k чисел, бóльших 5; сумму этих чисел обозначим S_k. Остальные $30 - k$ чисел по условию равны 5. Тогда

$$S_k + 5(30 - k) = 330 \quad \Rightarrow \quad S_k = 180 + 5k.$$

Так как написанные числа не превосходят 44, имеем:

$$S_k \leqslant 44k \quad \Rightarrow \quad 180 + 5k \leqslant 44k \quad \Rightarrow \quad k \geqslant \frac{180}{39}\,,$$

откуда

$$k \geqslant 5. \tag{11}$$

После уменьшения чисел вдвое и стирания чисел, меньших 3, на доске останутся k чисел с суммой $S_k/2$. Их среднее арифметическое

$$m = \frac{S_k}{2k} = \frac{180 + 5k}{2k} = \frac{90}{k} + \frac{5}{2}\,. \tag{12}$$

Предположим, что $14 < m < 15$. Тогда

$$14 < \frac{90}{k} + \frac{5}{2} < 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{23}{2} < \frac{90}{k} < \frac{25}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{180}{25} < k < \frac{180}{23} \quad \Rightarrow \quad 7\frac{1}{5} < k < 7\frac{19}{23}\,.$$

Это невозможно, поскольку k — целое число.

в) Из (12) и (11) имеем оценку

$$m \leqslant \frac{90}{5} + \frac{5}{2} = 20{,}5.$$

Пример, приведённый в пункте а), показывает, что равенство в этой оценке достигается. Следовательно, наибольшее значение m равно 20,5.

Задача 26. Ответ: а) да; б) нет; в) 63.

Решение. а) Каждому сотруднику надо выдать по 20000 рублей. Это сделать можно. Сначала исчерпаем все пятитысячные купюры: 27 человек получат по 4 купюры (итого 108 купюр) и один — две. Добавим ему 10 тысячных купюр, а остальные 240 тысячных купюр распределим поровну между оставшимися 12 сотрудниками (по 20 каждому).

б) Каждый из 80 сотрудников должен получить по 9000 рублей, а значит — как минимум по четыре тысячных купюры. Всего потребуется не менее 320 тысячных купюр, а у нас их имеется лишь 250. Следовательно, такое распределние премий невозможно.

► Пункт б) содержит указание на наихудший случай — когда премия сотрудника (число тысяч рублей) даёт остаток 4 при делении на 5. Если таких премий много, то возникнут проблемы с тысячными купюрами. ◄

в) Предположим, что сотрудников не менее 64. Выберем 63 человека и назначим каждому из них премию 4 тысячи рублей (а оставшиеся деньги распределим между остальными сотрудниками как угодно). Тогда потребуется $63 \cdot 4 = 252$ тысячных купюры вопреки условию.

Покажем, что в случае 63 сотрудников деньги удастся выдать при любом распределении премий. Пусть премия i-го сотрудника (число тысяч рублей) равна

$$s_i = 5n_i + r_i,$$

где r_i — остаток числа s_i при делении на 5. Суммируя по всем i от 1 до 63, получим

$$800 = 5N + R,$$

где R — сумма всех r_i.

Ясно, что $R \leqslant 63 \cdot 4 = 252$. Поскольку $R = 800 - 5N$ делится на 5, имеем $R \leqslant 250$. Следовательно, тысячных купюр хватит на то, чтобы выдать всем сотрудникам величины остатков их премий при делении на 5.

Итак, выдадим вначале всем 63 сотрудникам остатки $r_1, r_2, \ldots, r_{63}$ (напомним, в тысячах рублей) тысячными купюрами. Тем самым мы выдали сумму, равную R, а останется невыданной сумма $800 - R$, кратная 5. Если при этом тысячные купюры ещё не израсходованы, то оставшееся их количество также кратно 5 (ибо другие купюры — пятитысячные); сложим оставшиеся тысячные купюры в пачки по 5 штук.

Теперь сотрудникам надо выдать недостающие деньги: $5n_1, 5n_2, \ldots, 5n_{63}$. На это как раз имеются в нужном количестве пятитысячные купюры и пачки-пятёрки тысячных.

Задача 27. Ответ: а) да; б) да; в) 4.

Решение. Проанализируем сначала ситуацию для трёх чисел. Пусть написаны числа x, y и z. Без ограничения общности мы можем упорядочить их по возрастанию: $x < y < z$.

Заметим, что $x + y < z + z = 2z$ и вместе с тем $x + y$ делится на z; значит, $x + y = z$. Таким образом, написаны числа x, y, $x + y$.

Далее, сумма $x + (x + y) = 2x + y$ делится на y, поэтому и $2x$ делится на y. Но $2x < 2y$, так что $2x = y$. Следовательно, написаны числа x, $2x$ и $3x$.

Одно из написанных чисел есть 2045, но оно не делится ни на 2, ни на 3. Поэтому $x = 2045$, но тогда $3x > 5000$, что противоречит условию. Значит, три числа написаны быть не могут.

► Теперь обратим внимание, что для чисел 1, 2 и 3 сумма любых двух из них делится на третье. Припишем сюда любое количество нечётных чисел — и сумма любых двух чисел будет делиться на одно из остальных! Это позволит нам построить нужные примеры. ◄

а) Припишем к 1, 2, 3 все нечётные числа до 2045 включительно: $1, 2, 3, 5, 7, \ldots, 2045$. Тогда сумма двух нечётных чисел делится на 2, сумма 2 и 1 делится на 3, сумма двойки и большего числа делится на 1.

б) Ровно пять чисел могут быть написаны: 1, 2, 3, 5, 2045.

в) Ровно четыре числа могут быть написаны: 1, 2, 3, 2045. Три числа, как мы видели выше, написать нельзя. Значит, можно написать самое меньшее четыре числа.

Задача 28. Ответ: а) $\underbrace{41, 41, \ldots, 41}_{68}, 91, 91$; б) нет; в) 693.

Решение. Пусть $\overline{a_1b_1}, \ldots, \overline{a_nb_n}$ — исходные числа, причём ни одна из цифр a_i, b_i не равна нулю. Тогда получившиеся числа суть $\overline{b_1a_1}, \ldots, \overline{b_na_n}$.

Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$ и $B = b_1 + \ldots + b_n$. Тогда сумма исходных чисел равна $10A + B$, а сумма получившихся чисел равна $10B + A$.

а) Годятся, например, числа $\underbrace{41, \ldots, 41}_{68}, 91, 91$. В самом деле,

$$68 \cdot 41 + 91 + 91 = 2970, \quad 68 \cdot 14 + 19 + 19 = 990.$$

► Покажем, как найден пример. Просто решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = 990 \end{cases}$$

и находим $A = 290$, $B = 70$. После этого положим $n = 70$, $b_1 = \ldots = b_{70} = 1$ и подберём нужные a_i. Разумеется, легко построить и другие примеры. ◄

б) Нет, такого случиться не могло. В самом деле, предположим, что сумма получившихся чисел в пять раз меньше суммы исходных чисел:

$$\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = 594, \end{cases}$$

откуда $A = a_1 + \ldots + a_n = 294$ и $B = b_1 + \ldots + b_n = 30$. Поскольку все цифры $b_i \geqslant 1$, из последнего равенства имеем $n \leqslant 30$. Но тогда, с учётом условия $a_i \leqslant 9$, получаем $a_1 + \ldots + a_n \leqslant 270$ — противоречие.

в) Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = S. \end{cases}$$

Мы ищем минимальное значение S.

Из системы имеем $99B = 10S - 2970$, так что S делится на 99 (поскольку $2970 = 99 \cdot 30$). Значит, $S = 99k$ и $B = 10k - 30$. Из второго уравнения системы получим тогда $A = 300 - k$.

Итак,

$$\begin{cases} a_1 + \ldots + a_n = 300 - k, \\ b_1 + \ldots + b_n = 10k - 30. \end{cases}$$

С учётом неравенств $a_i \leqslant 9$ и $b_i \geqslant 1$ получим

$$\begin{cases} 9n \geqslant 300 - k, \\ n \leqslant 10k - 30, \end{cases}$$

откуда $300 - k \leqslant 9n \leqslant 90k - 270$, что приводит к неравенству $k \geqslant 7$.

Рассмотрим минимально возможное $k = 7$. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + \ldots + a_n = 293, \\ b_1 + \ldots + b_n = 40, \end{cases}$$

и подходящий пример легко строится: $n = 40$; $b_1 = \ldots = b_{40} = 1$; $a_1 = \ldots = a_{30} = 9$, $a_{31} = \ldots = a_{39} = 2$, $a_{40} = 5$. Соответствующие исходные числа равны

$$\underbrace{91, \ldots, 91}_{30}, \underbrace{21, \ldots, 21}_{9}, 51,$$

а получившиеся из них числа дают минимально возможную сумму $S_{\min} = 99k_{\min} = 99 \cdot 7 = 693$.

Задача 29. Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Решение. Последовательность полностью определяется первыми двумя членами: $a_1 = p$ и $a_2 = q$. Имеем, в частности:

$$a_3 = p + q, \quad a_4 = p + 2q, \quad a_5 = 2p + 3q.$$

а) Условие $4a_5 = 7a_4$ может выполняться. Пример последовательности: 2, 1, 3, 4, 7.

► Пример находим так: $4(2p + 3q) = 7(p + 2q)$, откуда $p = 2q$. Можно положить $p = 2$ и $q = 1$. ◄

б) Пусть выполнено $5a_5 = 7a_4$. Тогда $5(2p + 3q) = 7(p + 2q)$, откуда $3p = -q$. Но это противоречит тому, что p и q — натуральные числа.

в) Пусть выполнено равенство

$$6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right) a_n. \tag{13}$$

Будем получать отсюда аналогичные равенства для меньших номеров членов последовательности:

$$\begin{gathered}
\left(n^2 + 24\right) a_n = 6n(a_n + a_{n-1}) \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; 6na_{n-1} = \left(n^2 - 6n + 24\right) a_n = \left(n^2 - 6n + 24\right)(a_{n-1} + a_{n-2}) \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; \left(n^2 - 6n + 24\right) a_{n-2} = \left(12n - n^2 - 24\right) a_{n-1} = \left(12n - n^2 - 24\right)(a_{n-2} + a_{n-3}) \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; \left(n^2 - 12n + 24\right) a_{n-3} = \left(18n - 2n^2 - 48\right) a_{n-2} = \left(18n - 2n^2 - 48\right)(a_{n-3} + a_{n-4}) \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; \left(2n^2 - 18n + 48\right) a_{n-4} = \left(30n - 3n^2 - 72\right) a_{n-3} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; 2\left(n^2 - 9n + 24\right) a_{n-4} = -3\left(n^2 - 10 + 24\right) a_{n-3} = 3(n-4)(6-n)a_{n-3}.
\end{gathered}$$

Для любого n выражение $n^2 - 9n + 24$ положительно. Для $n \geqslant 6$ выражение $(n-4)(6-n)$ неположительно; значит, ни при каких $n \geqslant 6$ равенство (13) выполняться не может.

При $n = 5$ равенство (13) даёт $30a_6 = 49a_5$. Такое возможно, например, для последовательности 3, 8, 11, 19, 30, 49.

Задача 30. Ответ: а) да; б) нет; в) $79/21$.

Решение. а) Записав $7/19$ как $21/57$, легко строим пример: $a = 10$, $b = 11$, $c = 20$, $d = 37$.

б) Предположим, что такое возможно:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 11 \cdot \frac{a+c}{b+d}.$$

После очевидных преобразований имеем:

$$ad(10b - d) + bc(10d - b) = 0.$$

Заметим, что $10b$ и $10d$ — трёхзначные числа, поэтому $10b - d > 0$ и $10d - b > 0$. Пришли к противоречию: сумма двух положительных чисел оказалась равна нулю.

в) По условию $a \geqslant 3b + 1$, $c \geqslant 6d + 1$. Отсюда, в частности, $b \leqslant 32$. С учётом данных неравенств имеем:

$$\frac{a+c}{b+d} \geqslant \frac{(3b+1)+(6d+1)}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{b+d} \geqslant 3 + \frac{3d+2}{32+d} = 3 + \frac{3d+96-94}{d+32} = \\
= 6 - \frac{94}{d+32} \geqslant 6 - \frac{94}{10+32} = \frac{79}{21}.$$

Равенство достигается в том случае, когда все неравенства обращаются в равенства, то есть при $d = 10$, $b = 32$, $c = 61$, $a = 97$. Итак, наименьшее значение нашей дроби равно $79/21$.

Задача 31. Ответ: а) 51 и 68; б) нет; в) 117 или 119.

Решение. Пусть a — число солдат в первом взводе, b — число солдат во втором взводе. Очевидно, что

$$51 \leqslant a < b \leqslant 68. \tag{14}$$

а) Подходящий пример: $a = 51 = 17 \cdot 3$, $b = 68 = 17 \cdot 4$ (при этом число солдат в роте равно $51 + 68 = 119 < 120$). Тогда роту можно построить в 7 рядов по 17 человек; первые три ряда — первый взвод, остальные четыре ряда — второй взвод.

б) Предположим, что рота построена требуемым образом по 11 человек в ряд. Тогда a и b делятся на 11. С учётом неравенств (14) имеем единственную возможность $a = 55$, $b = 66$. Но тогда $a + b = 121 > 120$ — противоречие.

в) Пусть рота построена требуемым образом по k человек в ряд ($k \geqslant 8$). Тогда a и b делятся на k. Из неравенств (14) следует, что $k \leqslant 17$. Остаётся перебрать 10 вариантов с $k = 8, 9, \ldots, 17$; в каждом из них на отрезке $[51; 68]$ может быть самое большее два числа a и b. Обозначаем $r = a + b$ число солдат в роте.

1) $k = 8 \;\Rightarrow\; a = 56$, $b = 64$, $r = 120$.
2) $k = 9 \;\Rightarrow\; a = 54$, $b = 63$, $r = 117$.
3) $k = 10 \;\Rightarrow\; a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.
4) $k = 11$ — невозможно по пункту б).
5) $k = 12 \;\Rightarrow\; a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.
6) $k = 13 \;\Rightarrow\; a = 52$, $b = 65$, $r = 117$.
7) $k = 14 \;\Rightarrow\; a = 56$, и не существует $b \in [51; 68]$.
8) $k = 15 \;\Rightarrow\; a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.
9) $k = 16 \;\Rightarrow\; a = 64$, и не существует $b \in [51; 68]$.
10) $k = 17 \;\Rightarrow\; a = 51$, $b = 68$, $r = 119$.

С учётом условия $r < 120$ мы видим, что в роте может быть 117 или 119 солдат.

Задача 32. Ответ: а) да; б) нет; в) 33.

Решение. Пусть куплено x красных и y синих карандашей. Тогда

$$17x + 13y \leqslant 495 \tag{15}$$

при дополнительном условии

$$-5 \leqslant y - x \leqslant 5. \tag{16}$$

Пусть $k = x + y$ — число купленных карандашей. Выразив отсюда $y = k - x$ и подставив в неравенства (15) и (16), получим систему

$$\begin{cases} 13k + 4x \leqslant 495, \\ \dfrac{k-5}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+5}{2}\,. \end{cases} \tag{17}$$

а) Пусть, например, $x = 18$ и $y = 14$. Тогда $17 \cdot 18 + 13 \cdot 14 = 488$, и оба неравенства (15) и (16) выполнены. Значит, 32 карандаша купить можно.

► Пример находим, полагая $k = 32$ в (17):

$$\begin{cases} 416 + 4x \leqslant 495, \\ \dfrac{27}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{37}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 19, \\ 14 \leqslant x \leqslant 18, \end{cases}$$

и можно взять, например, $x = 18$. ◄

б) Пусть $k = 35$. Система (17) принимает вид:

$$\begin{cases} 455 + 4x \leqslant 495, \\ \dfrac{30}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{40}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 10, \\ 15 \leqslant x \leqslant 20. \end{cases}$$

Полученная система не имеет решений. Значит, 35 карандашей купить нельзя.

в) Поскольку 32 карандаша купить можно, а 35 — нельзя, то остаётся проверить значения $k = 33$ и $k = 34$.

Если $k = 33$, то система (17) принимает вид:

$$\begin{cases} 429 + 4x \leqslant 495, \\ \dfrac{28}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{38}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 16, \\ 14 \leqslant x \leqslant 19. \end{cases}$$

Решения есть: например, $x = 14$ (и тогда $y = 19$). Значит, 33 карандаша купить можно.

Если же $k = 34$, то

$$\begin{cases} 442 + 4x \leqslant 495, \\ \dfrac{29}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{39}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 13, \\ 14 \leqslant x \leqslant 19. \end{cases}$$

Решений нет. Значит, 34 карандаша купить нельзя.

Итак, можно купить самое большее 33 карандаша.

Задача 33. Ответ: а) да; б) нет; в) 198/7.

Решение. Обозначим a, b, c, d, e, f и g выбранные семь чисел, расположенные в порядке возрастания. Тогда

$$A = d, \quad B = \frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}, \quad B - A = \frac{a+b+c+e+f+g-6d}{7}.$$

а) Пусть выбраны числа 1, 3, 5, 11, 15, 17, 27. Тогда, как нетрудно проверить, $B - A = 2/7$.

► Нам нужно, чтобы $a+b+c+e+f+g = 6d+2$. Видим, что левая часть даёт при делении на 6 остаток 2. Следя за остатком, и подбираем подходящие числа. ◄

б) Предположим, что $B - A = 3/7$. Тогда $a+b+c+e+f+g = 6d+3$. Слева стоит чётное число (сумма шести нечётных чисел), а справа — нечётное. Противоречие.

в) Нам нужно найти максимальное значение величины $S = a+b+c+e+f+g-6d$. Имеем:

$$S = (g-d) + (f-d) + (e-d) - (d-c) - (d-b) - (d-a).$$

Ясно, что $g \leqslant 79$, $f \leqslant 77$, $e \leqslant 75$, $d \geqslant 7$, $c \geqslant 5$, $b \geqslant 3$, $a \geqslant 1$, поэтому

$$g-d \leqslant 72, \; f-d \leqslant 70, \; e-d \leqslant 68, \; d-c \geqslant 2, \; d-b \geqslant 4, \; d-a \geqslant 6,$$

так что

$$S \leqslant 72 + 70 + 68 - 2 - 4 - 6 = 198.$$

Оценка точна: при $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$, $e = 75$, $f = 77$, $g = 79$ имеем $S = 198$. Следовательно, наибольшее значение S равно 198, а наибольшее значение $B - A$ равно $198/7$.

Задача 34. Ответ: а) нет; б) да; в) $6/7$.

Решение. Пусть $a < b < c < d < e < f < g$ — оценки экспертов. Обозначим

$$x = b + c + d + e + f, \quad y = a + g.$$

Тогда старый рейтинг равен $(x + y)/7$, новый рейтинг равен $x/5$, а модуль разности рейтингов

$$\Delta = \left|\frac{x}{5} - \frac{x+y}{7}\right| = \frac{|2x - 5y|}{35}.$$

а) Предположим, что $\Delta = \frac{1}{25}$. Тогда $|2x-5y| = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$. Получилось, что целое число $|2x-5y|$ равно нецелому — противоречие

б) Пусть эксперты поставили оценки 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7. Тогда старый рейтинг равен $24/7$, новый рейтинг равен $17/5$ и $\Delta = 1/35$.

▶ Пример строится элементарно: нужно подобрать оценки так, чтобы $|2x - 5y| = 1$. ◀

в) Оценим величину $2x - 5y$. Для этого запишем её следующим образом:

$$\begin{aligned} 2x - 5y = 2(b + c + d + e + f) - 5(a + g) = \\ = (b - a) + (c - a) + (d - a) + (e - a) + (f - a) - \\ - (g - b) - (g - c) - (g - d) - (g - e) - (g - f). \end{aligned}$$

Заметим, что выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} &1 \leqslant b - a \leqslant 7, & &5 \leqslant g - b \leqslant 11, \\ &2 \leqslant c - a \leqslant 8, & &4 \leqslant g - c \leqslant 10, \\ &3 \leqslant d - a \leqslant 9, & &3 \leqslant g - d \leqslant 9, \\ &4 \leqslant e - a \leqslant 10, & &2 \leqslant g - e \leqslant 8, \\ &5 \leqslant f - a \leqslant 11, & &1 \leqslant g - f \leqslant 7. \end{aligned}$$

В силу этих неравенств имеем оценку сверху

$$2x - 5y \leqslant 7 + 8 + 9 + 10 + 11 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 30$$

и оценку снизу

$$2x - 5y \geqslant 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 11 - 10 - 9 - 8 - 7 = -30.$$

Следовательно, $|2x - 5y| \leqslant 30$ и

$$\Delta \leqslant \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

Равенство достигается в том случае, когда в оценке сверху или снизу имеет место равенство, то есть, например, при выставлении экспертами оценок 0, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (другой пример — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12).

Итак, наибольшее возможное значение Δ равно $6/7$.

Задача 35. Ответ: а) 39; б) да; в) 167.

Решение. Пусть *первичный рейтинг* футболиста есть доля голосов за него, выраженная в процентах. Тогда по условию рейтинг — это округлённый до целого числа первичный рейтинг.

а) Пусть за первого футболиста проголосовало k человек. Имеем:

$$40{,}5 \leqslant \frac{100k}{17} < 41{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1377}{200} \leqslant k < \frac{1411}{200}\,,$$

откуда $k = 7$. После голосования Васи первичный рейтинг первого футболиста станет равен

$$\frac{100 \cdot 7}{18} = 38{,}88\ldots,$$

а рейтинг станет равен 39.

б) ► Чувствуется, что такое возможно: если до голосования Васи у многих футболистов первичный рейтинг полуцелый, то он округляется в бóльшую сторону; после голосования Васи первичный рейтинг у них станет чуть менее полуцелого и округлится в меньшую сторону, и тем самым суммарный рейтинг сильно упадёт.

Мы построим сразу «максимальный» пример, в котором первичный рейтинг *всех* футболистов до голосования Васи полуцелый. Данный пример пригодится нам в пункте в). ◄

Предположим, что до Васи проголосовало 200 человек: 67 из них — за первого футболиста, и по одному — за каждого из остальных 133 футболистов. Тогда первичный рейтинг первого футболиста равен $100 \cdot 67/200 = 33{,}5$, а у остальных — $100 \cdot 1/200 = 0{,}5$. Соответственно, рейтинг первого футболиста равен 34, а у остальных — 1. Суммарный рейтинг равен $34 + 133 \cdot 1 = 167$.

Пусть Вася проголосовал за первого футболиста. Первичный рейтинг первого футболиста стал равен $100 \cdot 68/201 \approx 33{,}8$, так что его рейтинг остался равен 34. Первичный рейтинг остальных футболистов стал равен $100 \cdot 1/201 \approx 0{,}498$, и их рейтинги обратились в нуль. Суммарный рейтинг стал равен 34, то есть уменьшился на $133 > 27$.

в) Сумма первичных рейтингов всех футболистов, очевидно, равна 100. Рейтинг футболиста может превосходить его первичный рейтинг самое большее на 0,5. Поэтому суммарный рейтинг всех 134 футболистов не превосходит

$$100 + 0{,}5 \cdot 134 = 167.$$

Пример пункта б) показывает, что суммарный рейтинг может быть равен 167. Следовательно, 167 — наибольшее значение суммарного рейтинга.

Задача 36. Ответ: а) да; б) нет; в) 110.

Решение. а) Например, $2014 = 2006 + 8$.

б) Предположим, что число 199 является суммой двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр. Тогда одно из этих чисел — трёхзначное (в противном случае их сумма не превосходит $99 + 99 = 198$), а другое — двузначное (в противном случае для некоторых цифр x и y имеем $199 = \overline{19x} + y$ и $y = 1 + 9 + x \geqslant 10$ — противоречие).

Итак, для некоторых цифр a, b, c, d имеем

$$199 = \overline{1ab} + \overline{cd} \;\Rightarrow\; \overline{ab} + \overline{cd} = 99 \;\Rightarrow\; (10a + b) + (10c + d) = 99 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 10(a + c) + (b + d) = 99 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a + c = 9, \\ b + d = 9, \end{cases}$$

откуда

$$a + b + c + d = 18. \tag{18}$$

Кроме того, $1 + a + b = c + d$, то есть

$$c + d - a - b = 1. \tag{19}$$

Складывая равенства (18) и (19), получим $2(c+d) = 19$ — противоречие, поскольку слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Следовательно, число 199 нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

в) Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ — различные натуральные числа с одинаковой суммой цифр S, и число x является их суммой: $x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Заметим, что $a_1 \geqslant S$. Кроме того, числа $a_1, \ldots, a_5$ дают одинаковые остатки при делении на 9, и поэтому разность любых двух этих чисел не меньше 9. Следовательно,

$$x \geqslant S + (S + 9) + (S + 18) + (S + 27) + (S + 36) = 5S + 90,$$

и если $S \geqslant 4$, то $x \geqslant 5 \cdot 4 + 90 = 110$. Оценка точна: $4 + 13 + 22 + 31 + 40 = 110$.

Остаётся рассмотреть случаи $S \leqslant 3$.

— Если $S = 1$, то $x \geqslant 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111 > 110$.

— Если $S = 2$, то $x \geqslant 2 + 11 + 20 + 101 + 110 = 244 > 110$.

— Если $S = 3$, то $x \geqslant 3 + 12 + 21 + 30 + 102 = 168 > 110$.

Значит, наименьшее возможное x равно 110.

Задача 37. Ответ: а) да; б) 17; в) 41.

Решение. Пусть x юношей отправили по 4 письма и y юношей отправили по 21 письму. Тогда $x + y = n$ — количество девушек, $4x + 21y = p$ — количество отправленных писем.

а) Пусть, например, $x = 14$ и $y = 3$. Тогда $n = 17$ и $p = 119 = 17 \cdot 7$. Очевидно, что 119 писем можно распределить между 17 девушками так, чтобы каждая девушка получила 7 писем.

► Пример найден так. Имеем: $4x + 21y = 7(x + y)$ или $3x = 14y$. Теперь можно взять $x = 14$ и $y = 3$. ◄

б) Пусть каждая девушка получила k писем: $4x + 21y = kn$. Подставив сюда $x = n - y$, получим $17y = (k - 4)n$. Заметим, что $k - 4$ меньше 17, поскольку

$$k = \frac{4x + 21y}{n} = \frac{4x + 21y}{x + y} < \frac{21x + 21y}{x + y} = 21$$

(в этой цепочке неравенство строгое, так как по условию $x \geqslant 2$). Значит, n делится на 17 и потому $n \geqslant 17$. Пример с $n = 17$ приведён выше. Следовательно, наименьшее возможное количество девушек равно 17.

в) Пусть девушки получили $k_1, k_2, \ldots, k_n$ писем (считаем, что $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$). Тогда $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 1$, $\ldots$, $k_n \geqslant n - 1$, откуда

$$p = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geqslant 1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

С другой стороны,

$$p = 4x + 21y = 4x + 21(n - x) = 21n - 17x \leqslant 21n - 17 \cdot 2 = 21n - 34.$$

Получаем неравенство

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 21n - 34 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 43n + 68 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{43 - \sqrt{1577}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{43 + \sqrt{1577}}{2}\,.$$

В частности,
$$n < \frac{43+\sqrt{1600}}{2} = \frac{83}{2},$$
то есть $n \leqslant 41$.

Покажем, что эта оценка точна. Пусть $n = 41$. Положим $x = 2$. Тогда $y = 39$, и число отправленных писем $p = 4 \cdot 2 + 21 \cdot 39 = 827$. Остаётся положить $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, …, $k_{40} = 39$, $k_{41} = 47$; действительно,
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1 + \ldots + 39 + 47 = 827.$$
Иными словами, первая девушка не получила ни одного письма, вторая получила одно письмо, …, 40-я получила 39 писем и 41-я получила 47 писем.

► Соображения, приводящие к примеру, просты. Если $n = 41$, то число писем
$$p \geqslant 0 + 1 + \ldots + 40 = \frac{41 \cdot 40}{2} = 820.$$
С другой стороны, $p = 21n - 17x = 861 - 17x$, и проходит $x = 2$: тогда $p = 861 - 17 \cdot 2 = 827 > 820$. ◄

Таким образом, в группе может быть самое большее 41 девушка.

Задача 38. Ответ: а) нет; б) нет; в) 10.

Решение. а) Выпишем все возможные пары, в которых одно число в три раза больше другого:
$$(1,3),\quad (2,6),\quad (3,9),\quad (4,12),\quad (5,15),\quad (6,18).$$
Сумма выписанных чисел равна $84 < 170$. Значит, сумма выбранных чисел не может равняться 170.

б) Предположим, что $k = 11$, то есть выбраны все числа от 1 до 22. Их сумма
$$S = 1 + 2 + \ldots + 22 = 253.$$
Поскольку все суммы в парах различны и не превосходят 27, для S имеем оценку:
$$S \leqslant 27 + 26 + \ldots + 17 = 242.$$
Полученное противоречие показывает, что k не может равняться 11.

в) Двадцать чисел от 1 до 20 можно разбить на пары так, чтобы суммы во всех парах были различны и не превосходили 27:
$$(20,7);\ (19,6);\ (18,8);\ (17,5);\ (16,4);\ (15,9);\ (14,3);\ (13,10);\ (12,2);\ (11,1).$$
Следовательно, наибольшее возможное значение k равно 10.

► За кадром остаются рассуждения, показывающие, что искать пример надо начиная с $k = 10$. Именно, пусть выбрано $2k$ чисел. Тогда их сумма
$$S \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^2 + k.$$
С другой стороны, поскольку все суммы в парах различны и не превосходят 27, имеем
$$S \leqslant 27 + 26 + \ldots + (27 - k + 1) = \frac{55k - k^2}{2}.$$

Шанс найти пример имеется только в том случае, если

$$2k^2 + k \leqslant \frac{55k - k^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k \leqslant \frac{54}{5},$$

так что $k = 10$ уже может подойти. ◄

Задача 39. Ответ: а) нет; б) да; в) 6.

Решение. а) Разность числа 11 и любого из оставшихся чисел по модулю не превосходит 10, поэтому, какова бы ни была расстановка чисел по окружности, все разности не могут оказаться не меньше 11.

б) Расставим числа по окружности в следующем порядке: 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10, 21, 11. Легко видеть, что разность любых двух соседних чисел по модулю не меньше 10.

в) Числа 1, 2, ..., 7 назовём *основными*. При любой расстановке чисел 1, 2, ..., 21 по окружности реализуется одна из двух ситуаций.

1. Какие-то два основных числа стоят рядом или через одно. Тогда разность этих основных чисел не превосходит 6.

2. Каждое третье число — основное. Тогда между какими-то двумя основными числами окажется число 8, и тогда одна из соответствующих разностей будет не больше 6.

Таким образом, при любой расстановке найдётся разность, не превосходящая 6, поэтому $k \leqslant 6$. С другой стороны, для расстановки 1, 8, 15, 2, 9, 16, 3, 10, 17, 4, 11, 18, 5, 12, 19, 6, 13, 20, 7, 14, 21 все разности не меньше 6. Значит, наибольшее значение k равно 6.

Задача 40. Ответ: а) да; б) нет; в) $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

Решение. Называем число *достижимым*, если оно может быть значением S.

а) Число 8 достижимо:

$$(-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 8.$$

► Приведённый пример не является самым простым (возможно, скажем, $-1 + 1 + 3 + 5 = 8$), однако он иллюстрирует идею решения пункта в) данной задачи. ◄

б) Предположим, что сумма k членов арифметической прогрессии a, $a + d$, ..., $a + (k-1)d$ равна 1:

$$\frac{2a + (k-1)d}{2} \cdot k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k\big(2a + (k-1)d\big) = 2.$$

Отсюда следует, что k — делитель двойки; но это противоречит условию $k \geqslant 3$. Поэтому число 1 не достижимо.

в) Рассуждения, аналогичные пункту б), показывают, что число -1 не достижимо. Число 0 достижимо: $-1 + 0 + 1 = 0$.

Пусть $n \geqslant 2$. Тогда, по аналогии с примером пункта а), число n является суммой арифметической прогрессии с разностью 1:

$$n = (-n+1) + (-n+2) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n,$$

в которой количество слагаемых равно $2n \geqslant 4$. Аналогично, для $n \leqslant -2$ имеем сумму как минимум четырёх слагаемых:

$$n = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + \ldots + (-n-2) + (-n-1).$$

Следовательно, любое целое n, отличное от ± 1, является достижимым.

Задача 41. Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Решение. а) Да, все НОД могут быть равны единице. Пример:

11 18

12 17

13 10

14 9

15 16

б) Допустим, что все НОД попарно различны. Их десять, поэтому среди них найдётся двузначное число. Если два различных числа имеют двузначный НОД, то хотя бы одно из них больше 20. Но в нашем наборе такого числа нет — противоречие.

в) Из предыдущего пункта следует, что количество попарно различных НОД не превосходит девяти. Далее, НОД двух чисел данного набора не может равняться 7 или 8, так как на 7 делится только 14, а на 8 — только 16. Значит, количество попарно различных НОД не более семи.

Пример расстановки, при которой количество различных НОД равно семи:

10 15

14 9

11 18

13 12

17 16

В самом деле, НОД$(18, 9) = 9$, НОД$(9, 15) = 3$, НОД$(15, 10) = 5$, НОД$(10, 14) = 2$, НОД$(16, 12) = 4$, НОД$(12, 18) = 6$, а остальные НОД равны 1.

Задача 42. Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Решение. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — исходная арифметическая прогрессия. Математик сначала вычисляет разность

$$r_n = (a_1 + \ldots + a_n)^2 - (a_1^2 + \ldots + a_n^2),$$

а потом — разность

$$r_{n+1} = (a_1 + \ldots + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2).$$

Преобразуем вторую разность:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= ((a_1 + \ldots + a_n) + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2) = \\ &= (a_1 + \ldots + a_n)^2 + 2(a_1 + \ldots + a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 - (a_1^2 + \ldots + a_n^2) - a_{n+1}^2 = \\ &= r_n + 2(a_1 + \ldots + a_n)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$r_{n+1} - r_n = 2(a_1 + \ldots + a_n)a_{n+1}. \tag{20}$$

а) Нужный пример: 1, 2, 3. В самом деле,

$$(1+2+3)^2 - (1^2+2^2+3^2) = 22, \quad (1+2+3+4)^2 - (1^2+2^2+3^2+4^2) = 70;$$

вторая величина больше первой на 48.

► Этот пример легко находится следующим образом. Согласно (20) имеем:

$$r_{n+1} - r_n = 2(a_1 + \ldots + a_n)a_{n+1} = 48 \;\Rightarrow\; (a_1 + \ldots + a_n)a_{n+1} = 24.$$

Видим, что a_{n+1} есть делитель числа 24. Подобрать нужные числа дальше несложно. ◄

б) Предположим, что $n = 12$. Пусть d — разность прогрессии. Из (20) получим:

$$1440 = r_{13} - r_{12} = 2(a_1 + \ldots + a_{12})a_{13} = (2a_1 + 11d) \cdot 12 \cdot (a_1 + 12d),$$

откуда

$$(2a_1 + 11d)(a_1 + 12d) = 120.$$

Вспомним теперь, что по условию прогрессия состоит из неотрицательных целых чисел и является возрастающей; значит, $a_1 \geqslant 0$ и $d \geqslant 1$. Но тогда левая часть полученного равенства не меньше $11 \cdot 12 = 132$ — противоречие. Следовательно, n не может равняться 12.

в) Имеем:

$$1440 = r_{n+1} - r_n = 2(a_1 + \ldots + a_n)a_{n+1} = (2a_1 + (n-1)d) \cdot n \cdot (a_1 + nd). \tag{21}$$

Из неравенств $a_1 \geqslant 0$ и $d \geqslant 1$ следует оценка

$$(2a_1 + (n-1)d) \cdot n \cdot (a_1 + nd) \geqslant (n-1) \cdot n \cdot n = (n-1)n^2,$$

так что

$$(n-1)n^2 \leqslant 1440.$$

Отсюда $n \leqslant 11$ (и это ещё раз доказывает невозможность $n = 12$ в пункте *б*). Далее, из равенства (21) мы видим, что 1440 делится на n. Значит, $n = 11$ невозможно.

Пусть $n = 10$. Из (21) получаем:

$$(2a_1 + 9d)(a_1 + 10d) = 144.$$

Если $d \geqslant 2$, то левая часть последнего равенства не меньше $18 \cdot 20 > 144$. Поэтому $d = 1$:

$$(2a_1 + 9)(a_1 + 10) = 144 \;\Rightarrow\; 2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0.$$

Дискриминант данного квадратного уравнения, равный 1273, не является квадратом целого числа. Поэтому квадратное уравнение не имеет целочисленных корней. Значит, $n = 10$ невозможно.

Пусть $n = 9$. Из (21) получаем:

$$(a_1 + 4d)(a_1 + 9d) = 80.$$

Если $d \geqslant 2$, то левая часть не меньше $8 \cdot 18 > 80$. При $d = 1$ имеем квадратное уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

у которого нет целых корней. Значит, n не может равняться 9.

Пример нужной прогрессии с $n = 8$ построить можно. Из (21) имеем:

$$(2a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = 180.$$

Годятся числа $a_1 = 4$ и $d = 1$. Таким образом, подходящая прогрессия: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

► Пример найден из тех же самых соображений: если $d \geqslant 2$, то левая часть не меньше $14 \cdot 16 > 180$. Значит, $d = 1$. Тогда $(2a_1 + 7)(a_1 + 8) = 180$, и остаётся решить это квадратное уравнение. ◄

Итак, исходная прогрессия может содержать самое большее 8 членов.

Задача 43. Ответ: а) 7, 5, 3, 1; б) нет; в) 348.

Решение. Введём обозначения:

$$x = a + b, \quad y = a - b, \quad z = c + d, \quad t = c - d.$$

Очевидно, что $x > y$ и $x > z > t$. В этих обозначениях имеем:

$$a + b + c + d = x + z, \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = xy + zt.$$

а) Согласно условию имеем систему:

$$\begin{cases} x + z = 16, \\ xy + zt = 32. \end{cases} \tag{22}$$

Заметим, что, поскольку $x - y = 2b$ есть число чётное, числа x и y одной чётности (то есть оба чётные или оба нечётные одновременно). Аналогично, числа z и t одной чётности; отсюда и из неравенства $z > t$ следует, что $z \geqslant 3$. А из первого уравнения системы (22) и из неравенства $x > z$ следует, что $z \leqslant 7$. Рассмотрим все возможные случаи для z.

- $z = 3$. Тогда $x = 13$, $t = 1$, и второе уравнение системы (22) принимает вид $13y + 3 = 32$ или $13y = 29$. Это невозможно, так как 29 не делится на 13.

- $z = 4$. Тогда $x = 12$, $t = 2$. Второе уравнение системы (22) принимает вид $12y + 8 = 32$, откуда $y = 2$. Легко находим отсюда: $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 1$.

- $z = 5$. Тогда $x = 11$, и второе уравнение системы (22) принимает вид $11y + 5t = 32$. Если $t = 1$, то $11y = 27$; если $t = 3$, то $11y = 17$; и то, и другое невозможно.

- $z = 6$. Тогда $x = 10$, и второе уравнение системы (22) принимает вид $10y + 6t = 32$ или $5y + 3t = 16$. Поскольку y чётно (как и x), имеется единственная возможность $y = 2$; тогда и $t = 2$. Находим: $a = 6$, $b = 4$, $c = 4$, $d = 2$. Это невозможно в силу условия $b > c$.

- $z = 7$. Тогда $x = 9$, и второе уравнение системы (22) принимает вид $9y + 7t = 32$. Поскольку t нечётно (как и z), может быть лишь $t = 1$ или $t = 3$. В этих случаях получаем соответственно $9y = 25$ и $9y = 11$; и то, и другое невозможно.

Таким образом, имеем $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 1$.

б) Предположим, что это возможно. Получаем систему:

$$\begin{cases} x + z = 29, \\ xy + zt = 29. \end{cases} \tag{23}$$

Поскольку $xy \geqslant x$ и $zt \geqslant z$, данная система может иметь решение лишь при $y = t = 1$. Имеем, стало быть, $a - b = c - d = 1$, то есть $b = a - 1$ и $c = d + 1$; тогда первое уравнение системы (23) даёт:

$$a + (a - 1) + d + (d + 1) = 29,$$

или $2a + 2d = 29$. Пришли к противоречию: слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Следовательно, равенства $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$ не могут выполняться одновременно.

в) Имеем систему:

$$\begin{cases} x + z = 1400, \\ xy + zt = 1400. \end{cases}$$

Снова $y = t = 1$, то есть $b = a - 1$ и $c = d + 1$. В данном случае получим $2a + 2d = 1400$, откуда $a = 700 - d$ и $b = 699 - d$. Должно быть $b > c$, или $699 - d > d + 1$, откуда $d < 349$. Таким образом, имеется 348 возможных значений $d = 1, 2, \ldots, 348$ и, соответственно, 348 возможных значений $a = 699, 698, \ldots, 352$.

Задача 44. Ответ: а) да; б) нет; в) 91.

Решение. а) Да, может. Например, $410 : (4 + 1 + 0) = 82$.

► Как построен пример? Рассмотрим трёхзначное число $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Имеем:

$$100x + 10y + z = 82(x + y + z) \;\Rightarrow\; 18x = 72y + 81z \;\Rightarrow\; 2x = 8y + 9z.$$

Полученному равенству удовлетворяют цифры $x = 4$, $y = 1$, $z = 0$. ◄

б) Предположим, что для трёхзначного числа $\overline{xyz}$ выполнено равенство

$$100x + 10y + z = 83(x + y + z),$$

то есть

$$17x = 73y + 82z. \tag{24}$$

Самая большая цифра — это 9, поэтому

$$73y + 82z \leqslant 17 \cdot 9 = 153.$$

Отсюда видно, что возможны лишь два случая: $z = 0$ или $z = 1$.

1. Если $z = 0$, то из (24) получаем $17x = 73y$. Значит, $17x$ делится на простое число 73. Однако ни 17, ни x (будучи цифрой) на 73 не делятся. Противоречие.

2. Если $z = 1$, то из (24) получаем $17x = 73y + 82$, что не превосходит 153. Значит, $y = 0$ или $y = 1$. В этих случаях имеем соответственно $17x = 82$ и $17x = 155$; оба равенства невозможны, так как их правые части не делятся на 17.

Полученные противоречия показывают, что при делении трёхзначного числа на сумму его цифр не может получиться 83.

в) Пусть снова x, y, z — цифры. Ищем наибольшее натуральное n, такое, что

$$100x + 10y + z = n(x + y + z).$$

Перепишем это равенство следующим образом:

$$n(y + z) - 10y - z = (100 - n)x,$$

и так как x не превосходит 9, получим:

$$n(y+z) - 10y - z \leqslant (100-n)\cdot 9 = 900 - 9n.$$

Отсюда

$$n \leqslant \frac{900+10y+z}{y+z+9}\,. \tag{25}$$

По условию наше трёхзначное число не делится на 100, то есть y и z не равны нулю одновременно; иными словами, выполнено неравенство $y+z \geqslant 1$. Тогда для правой части неравенства (25) имеем:

$$\frac{900+10y+z}{y+z+9} = \frac{900+10(y+z+9)-9z-90}{y+z+9} =$$
$$= 10 + \frac{810-9z}{y+z+9} \overset{(y+z\geqslant 1)}{\leqslant} 10 + \frac{810-9z}{10} \overset{(z\geqslant 0)}{\leqslant} 10 + \frac{810}{10} = 91. \tag{26}$$

Итак, справедлива оценка $n \leqslant 91$. Равенство имеет место для числа 910:

$$910 : (9+1+0) = 91.$$

► Этот пример найти нетрудно: при $x=9$, $y=1$ и $z=0$ все неравенства в (25) и (26) превращаются в равенства. ◄

Итак, максимальное натуральное число, которое может получиться при делении трёхзначного числа на сумму его цифр, равно 91.

Задача 45. Ответ: а) 13835; б) нет; в) 1041 или 1053.

Решение. Пусть среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ имеется x_1 единиц, x_2 двоек, x_3 троек и x_4 четвёрок. Тогда $x_1+x_2+x_3+x_4 = 350$. Кроме того, по условию $S_1 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 569$. Имеем также:

$$S_2 = x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4,$$
$$S_3 = x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4,$$
$$S_4 = x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4.$$

а) Условие $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$ приводит к системе четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 569, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 1307, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = 3953. \end{cases} \tag{27}$$

Будем решать эту систему методом последовательного исключения неизвестных (так называемым методом Гаусса[1]). Сначала исключим x_1 из второго, третьего и четвёртого уравнений. Для этого заменим второе уравнение системы (27) на разность второго и первого; третье — на разность третьего и второго; четвёртое — на разность четвёртого и второго:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 738, \\ 6x_2 + 24x_3 + 60x_4 = 3384. \end{cases} \tag{28}$$

[1] На первом курсе вас научат делать такие вещи с помощью матриц, что гораздо быстрее и компактнее.

Сокращая третье и четвёртое уравнения системы (28) на 2 и 6 соответственно, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 369, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 564. \end{cases} \tag{29}$$

Теперь исключим x_2 из третьего и четвёртого уравнений системы (29). Третье уравнение заменяем на разность третьего и второго, а четвёртое — на разность четвёртого и третьего:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ \phantom{x_1 + x_2 + 2{}} x_3 + 3x_4 = 150, \\ \phantom{x_1 + x_2 + 2{}} x_3 + 4x_4 = 195. \end{cases} \tag{30}$$

Четвёртое уравнение системы (30) заменяем на разность четвёртого и третьего уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ \phantom{x_1 + x_2 + 2{}} x_3 + 3x_4 = 150, \\ \phantom{x_1 + x_2 + 2x_3 + 3{}} x_4 = 45. \end{cases} \tag{31}$$

Теперь начинается так называемый обратный ход метода Гаусса. Зная x_4, из третьего уравнения системы (31) находим x_3:

$$x_3 = 150 - 3x_4 = 150 - 3 \cdot 45 = 15.$$

Зная x_3, из второго уравнения находим x_2:

$$x_2 = 219 - 2x_3 - 3x_4 = 219 - 30 - 135 = 54,$$

и, наконец,

$$x_1 = 350 - x_2 - x_3 - x_4 = 350 - 54 - 15 - 45 = 236.$$

Остаётся вычислить требуемую величину S_4:

$$S_4 = x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = 236 + 16 \cdot 54 + 81 \cdot 15 + 256 \cdot 45 = 13835.$$

б) Предположим, что $S_4 = 4857$. Вычитая из уравнения $x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = 4857$ уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350$, получим

$$15x_2 + 80x_3 + 255x_4 = 4507.$$

Левая часть данного равенства делится на 5, а правая — нет. Следовательно, S_4 не может равняться 4857.

в) Пусть $S_4 = 4785$, $S_2 = a$. Нам надо найти все возможные значения a. Имеем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 569, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = 4785, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = a. \end{cases} \tag{32}$$

Снова применяем метод Гаусса. Второе уравнение системы (32) заменяем разностью второго и первого; третье — разностью третьего и первого; четвёртое — разностью четвёртого и первого:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad\; x_4 = 350, \\ \qquad\; x_2 + \;2x_3 + \;\;3x_4 = 219, \\ \quad 15x_2 + 80x_3 + 255x_4 = 4435, \\ \qquad 3x_2 + \;8x_3 + \;15x_4 = a - 350. \end{cases} \tag{33}$$

Сократим третье уравнение системы (33) на 5:

$$\begin{cases} x_1 + \; x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 = 350, \\ \qquad x_2 + \;2x_3 + \;3x_4 = 219, \\ \quad 3x_2 + 16x_3 + 51x_4 = 887, \\ \quad 3x_2 + \;8x_3 + 15x_4 = a - 350. \end{cases} \tag{34}$$

Третье уравнение системы (34) заменяем разностью третьего и утроенного второго и сокращаем полученное уравнение на 2; четвёртое — разностью третьего и четвёртого:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \; x_3 + \quad x_4 = 350, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + \;3x_4 = 219, \\ \qquad\qquad 5x_3 + 21x_4 = 115, \\ \qquad\qquad 8x_3 + 36x_4 = 1237 - a. \end{cases} \tag{35}$$

Из третьего уравнения системы (35) мы видим, что x_4 делится на 5, то есть $x_4 = 5k$ для некоторого целого неотрицательного k. Третье уравнение примет вид:

$$5x_3 + 21 \cdot 5k = 115,$$

откуда

$$x_3 = 23 - 21k.$$

С учётом требования $x_3 \geqslant 0$ заключаем, что $k = 0$ или $k = 1$. Это лишь необходимые условия на k; остаётся проверить их достаточность, то есть выяснить, имеет ли система (35), и тем самым система (32), целые неотрицательные решения при данных k.

Пусть $k = 0$. Тогда $x_4 = 0$, $x_3 = 23$, и далее из системы (35) находим: $x_2 = 173$, $x_1 = 154$. Значит, $k = 0$ годится. Из четвёртого уравнения системы (35) получаем:

$$a = 1237 - 8 \cdot 23 = 1053.$$

Пусть теперь $k = 1$. Тогда $x_4 = 5$, $x_3 = 2$, и аналогично находим: $x_2 = 200$, $x_1 = 143$. Значение $k = 1$ также годится, и в этом случае получаем

$$a = 1237 - 8 \cdot 2 - 36 \cdot 5 = 1041.$$

Итак, все возможные значения $a = S_2$ равны 1053 и 1041.

Задача 46. Ответ: а) -5, -3, 4; б) четыре; в) нет.

Решение. а) Непосредственной проверкой легко убедиться, что если задумано одно число, то набор состоит из одного числа; если задумано два числа, то набор состоит из трёх чисел; если задумано три числа, то набор состоит из семи чисел; если задумано четыре числа, то набор состоит из 15 чисел. Ясно также, что с увеличением количества задуманных чисел объём набора возрастает.

► Для знакомых с комбинаторикой: если задумано n чисел, то объём набора равен $2^n - 1$. Ведь, по сути, мы рассматриваем всевозможные подмножества n-элементного множества (а их всего 2^n), за исключением пустого множества. ◄

Наш набор -8, -5, -4, -3, -1, 1, 4 содержит семь чисел. Следовательно, задумано три числа. Если бы все задуманные числа были положительными (отрицательными), то набор состоял бы только из положительных (отрицательных) чисел. Значит, среди задуманных имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Допустим, что задуманы одно отрицательное число a и два положительных. Тогда $a = -8$, поскольку все остальные числа набора должны быть больше a. Но тогда задумано число 3 ($-8+3 = -5$), а его нет в наборе. Противоречие показывает, что задуманы два отрицательных числа и одно положительное.

Наименьшее число набора -8 должно быть суммой двух задуманных отрицательных чисел. В наборе есть лишь одна такая пара: -5 и -3. Значит, они и задуманы. Третье задуманное число (единственное положительное) должно быть равно 4 (наибольшему числу набора). Легко убедиться, что числа -5, -3, 4 в самом деле порождают данный набор.

б) Одно число задумано быть не могло, поскольку набор содержит как минимум два числа.

Пусть задуманы два числа a и b. Тогда набор состоит из трёх чисел a, b, $a+b$. Предположение о том, что два из них равны нулю, немедленно приводит к выводу, что и третье обращается в нуль — в противоречии с условием.

Пусть задуманы три числа. Двух нулей среди них быть не может, поскольку в наборе тогда появятся три нуля (эти два и их сумма). Возможны следующие четыре варианта.

1. Все три числа ненулевые, и среди них нет противоположных (по знаку). Тогда набор может содержать самое большее один нуль — сумму трёх задуманных чисел.

2. Все три числа ненулевые, и два из них противоположны. Тогда набор содержит ровно один нуль — сумму двух противоположных чисел.

3. Одно из трёх чисел равно нулю, остальные два не противоположны. Тогда в наборе ровно один нуль.

4. Одно из трёх чисел равно нулю, остальные два противоположны. Тогда в наборе будет три нуля (задуманный нуль, сумма двух противоположных, сумма трёх).

Как видим, ни в одном из рассмотренных случаев набор не содержит ровно двух нулей. Значит, три числа задуманы быть не могут, и потому задумано не менее четырёх чисел.

Четыре числа могут быть задуманы, например -2, -1, 1, 3. В нуль обращаются ровно две из возможных сумм: $-1+1 = 0$ и $-2-1+3 = 0$.

► Как найден пример? Ясно, что нуль задуман быть не может, так как если в наборе присутствует второй нуль, то в сумме с задуманным получится и третий. Если задуманы две пары противоположных чисел, то в наборе три нуля. Значит, нулю должны быть равны сумма двух и сумма трёх чисел. ◄

Следовательно, наименьшее возможное количество задуманных чисел равно четырём.

в) Задуманные числа не всегда можно однозначно восстановить по набору. Например, задумаем сначала числа 1, 1, -2, а потом числа -1, -1, 2. В обоих случаях получим один и тот же набор -2, -1, -1, 0, 1, 1, 2.

► Взяли числа, дающие в сумме нуль, а потом поменяли у них знаки — набор не изменился. ◄

Задача 47. Ответ: а) 2, 2, 6; б) нет; в) 7, 8, 10, 16 или 7, 8, 8, 8, 10.

Решение. а) Непосредственной проверкой убеждаемся, что задуманные числа 2, 2, 6 приводят к набору 2, 4, 6, 8, 10.

► Есть и другие примеры: 2, 4, 4 или 2, 2, 2, 2, 2. ◄

б) Предположим, что существует пример задуманных чисел, приводящий к набору 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22. Тогда число 1 задумано (это наименьшее число набора). Две единицы или двойка задуманы быть не могут, так как 2 в набор не входит. Значит, задумано число 3. Число 4 задумано быть не может, поскольку $3 + 4 = 7$ не входит в набор. Значит, задумано 5. Но тогда число $1+3+5 = 9$ должно присутствовать в наборе, а его нет. Полученное противоречие показывает, что не существует задуманных чисел, дающих указанный набор.

(Можно рассуждать и «с другого конца» набора. Число 22 есть сумма всех задуманных чисел, наименьшее из которых равно 1. Значит, набор должен содержать и сумму всех задуманных чисел кроме 1, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа в наборе нет — противоречие.)

в) Среди задуманных чисел, дающих набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41, наименьшим является число 7. При этом 8 и 10 также задуманы (в противном случае среди задуманных были бы числа, меньшие 7). Сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - (7 + 8 + 10) = 16$. Возможны два варианта.

1. Число 16 задумано. Таким образом, задуманы числа 7, 8, 10, 16. Непосредственной проверкой убеждаемся, что они дают указанный в условии набор.

2. Число 16 не задумано. Тогда, помимо 7, 8 и 10, задумано ещё два или более чисел, не меньших 7, сумма которых равна 16. Тут возможны лишь два варианта: $7+9 = 8+8 = 16$. Однако 9 задумано быть не может ввиду отсутствия в наборе числа $17 = 8+9$. Ну а вариант 7, 8, 8, 8, 10 годится (это легко проверяется).

Итак, все возможные примеры задуманных чисел — 7, 8, 10, 16 и 7, 8, 8, 8, 10.

Задача 48. Ответ: а) да; б) нет; в) 39 грузовиков.

Решение. а) ► Найдём прежде всего суммарную массу глыб:

$$50 \cdot 800 + 60 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 = 190000 \text{ кг} = 190 \text{ т}.$$

Нам же предлагается суммарная грузоподъёмность грузовиков $60 \cdot 5 = 300$ т. Это очень много, и поэтому ясно, что подобрать пример не составит труда. ◄

Все 50 глыб по 800 кг разложим в 10 грузовиков — в каждый по 5 глыб (то есть по 4 тонны). Все 60 глыб по 1000 кг разложим в 20 грузовиков — в каждый по 3 глыбы (то есть по 3 тонны). Все 60 глыб по 1500 кг разложим в 30 грузовиков — в каждый по 2 глыбы (то есть по 3 тонны). Как видим, все глыбы разместились в $10 + 20 + 30 = 60$ грузовиках.

б) Заметим, что $38 \cdot 5$ т $= 190$ т есть как раз суммарная масса глыб.

► Таким образом, обойтись менее чем 38 грузовиками заведомо не получится. Поэтому, если бы оказалось возможным разложить все глыбы в 38 грузовиков, то вряд ли был бы задан третий вопрос задачи ;-) Следовательно, имеет смысл думать в направлении доказательства невозможности данной раскладки. ◀

Предположим, что можно вывезти все глыбы на 38 грузовиках. Тогда в каждом грузовике находится в точности по 5 тонн. Заметим следующее:

- ровно одна 800-килограммовая глыба в грузовике лежать не может, так как оставшуюся массу $5000 - 800 = 4200$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно две 800-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 2 \cdot 800 = 3400$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно три 800-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 3 \cdot 800 = 2600$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно четыре 800-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 4 \cdot 800 = 1800$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно шесть 800-килограммовых глыб в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 6 \cdot 800 = 200$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- семь и более 800-килограммовых глыб в грузовик не влезут ($7 \cdot 800 > 5000$).

Значит, если в грузовике имеются 800-килограммовые глыбы, то их там ровно 5 штук с общей массой 4000 кг. Недостающие 1000 кг в этом грузовике заполняются единственным способом — глыбой в 1000 кг. Так будут заполнены $50 : 5 = 10$ грузовиков.

Остальные 28 грузовиков должны быть заполнены только глыбами массой 1000 и 1500 кг. Заметим следующее:

- ровно одна 1500-килограммовая глыба в грузовике лежать не может, так как оставшуюся массу $5000 - 1500 = 3500$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 кг;
- ровно три 1500-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массу $5000 - 3 \cdot 1500 = 500$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 кг;
- четыре и более 1500-килограммовых глыб в грузовик не влезут ($4 \cdot 1500 > 5000$).

Следовательно, в каждом из оставшихся 28 грузовиков должны лежать ровно две глыбы по 1500 кг (и две глыбы по 1000 кг). Но $28 \cdot 2 = 56$, а 1500-килограммовых глыб у нас 60. Полученное противоречие показывает, что 38 грузовиков не хватит для одновременного вывоза всех глыб.

в) Из предыдущего пункта следует, что грузовиков должно быть не менее 39. Приведём пример раскладки глыб по 39 грузовикам:

- в каждый из 30 грузовиков кладём две 1500-килограммовые глыбы и две 1000-килограммовые глыбы (тем самым глыбы обоих видов разложены полностью);
- в каждый из 8 грузовиков кладём по шесть 800-килограммовых глыб (тем самым разложены 48 таких глыб);
- в один грузовик кладём оставшиеся две 800-килограммовые глыбы.

Следовательно, наименьшее число грузовиков, необходимое для одновременного вывоза всех глыб, равно 39.

Задача 49. Ответ: а) может; б) 41; в) 3 и 6.

Решение. а) Предъявляем пример: числа 2, 3, 4, 5 образуют арифметическую прогрессию, и сумма их равна 14.

б) ► Начинаем с наводящих соображений. Мы чувствуем, что «максимальная» прогрессия начинается с единицы и имеет разность единица: 1, 2, ..., n. Сумма такой прогрессии:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Непосредственно убеждаемся, что $S_{41} = 861$ и $S_{42} = 903$. Поэтому возникает предположение, что наибольшее n равно 41. Остаётся грамотно оформить решение. ◄

Пусть a и d — первый член и разность прогрессии. Так как прогрессия состоит из натуральных чисел, имеем неравенства $a \geqslant 1$ и $d \geqslant 1$.

Предположим, что $n \geqslant 42$. Тогда для суммы S первых n членов прогресии имеем:

$$S = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n \geqslant \frac{2a + 41d}{2} \cdot 42 \geqslant \frac{2 \cdot 1 + 41 \cdot 1}{2} \cdot 42 = 903 > 900,$$

что противоречит условию. Следовательно, $n \leqslant 41$ (оценка).

Приведём пример арифметической прогрессии, состоящей из 41 числа и удовлетворяющей условию задачи: 1, 2, 3, ..., 40, 41. Её сумма равна $861 < 900$.

Таким образом, наибольшее n равно 41.

в) Прежде всего заметим, что $n < 41$ (в противном случае сумма прогрессии не меньше $861 > 123$). Разложим 123 на простые множители: $123 = 3 \cdot 41$. Имеем:

$$\frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n = 123 = 3 \cdot 41,$$

то есть

$$(2a + d(n-1))\, n = 2 \cdot 3 \cdot 41.$$

Мы видим, что число $2 \cdot 3 \cdot 41$ делится на n. С учётом неравенства $3 \leqslant n < 41$ имеются лишь две возможности $n = 3$ и $n = 2 \cdot 3 = 6$.

► Пока ещё не известно, существуют ли прогрессии с указанными n. Поищем примеры подходящих прогрессий. ◄

Подходящая прогрессия с $n = 3$ существует: 40, 41, 42. Подходящая прогрессия с $n = 6$ также существует: 18, 19, 20, 21, 22, 23. Следовательно, возможными значениями n являются в данном случае 3 и 6.

Задача 50. Ответ: а) да; г) 1, 126, ..., 8876.

Решение. а) Да, может: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

б) Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей. Предположим, что разность прогрессии d является r-значным числом (то есть десятичная запись числа d состоит ровно из r цифр).

Возьмём некоторый член a_n нашей прогрессии и обозначим через i цифру, расположенную в $(r+1)$-м разряде его десятичной записи (то есть $(r+1)$-ю по счёту цифру со стороны единиц; если a_n является r-значным числом, то полагаем $i = 0$). Цифра 9 отсутствует, поэтому i может принимать одно из девяти значений: $i = 0, 1, \ldots, 8$.

Множество членов прогрессии, у которых в $(r+1)$-м разряде стоит цифра i, мы будем называть i-группой. Всего, таким образом, имеется не более девяти групп членов прогрессии: 0-группа, 1-группа, ..., 8-группа.

Поскольку число d является r-значным, при переходе от члена a_n к члену $a_{n+1} = a_n + d$ цифра i либо остаётся неизменной, либо увеличивается на единицу; иными словами, мы либо остаёмся в i-группе, либо переходим в $(i+1)$-группу. Если мы остались в i-группе, то значение r-го разряда увеличилось. В r-м разряде может стоять одна из девяти цифр 0, 1, ..., 8, поэтому в i-группе не более девяти членов прогрессии.

Итак, i-групп не более девяти, а в каждой группе не более девяти членов; следовательно, всего членов прогрессии не более $9 \cdot 9 = 81 < 100$.

в) Покажем, что на самом деле в i-группе не более восьми членов. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — члены i-группы (они сами по себе образуют арифметическую прогрессию с разностью d).

Обозначим $c_1, c_2, \ldots, c_m$ остатки от деления чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ на 10^r. (Попросту говоря, каждое число c_k получается выбрасыванием из десятичной записи соответствующего числа b_k всех цифр начиная с $(r+1)$-й; например, если $r = 2$ и $b_k = 123$, то $c_k = 23$.) Ясно, что числа c_1, $c_2, \ldots, c_m$ также образуют арифметическую прогрессию с разностью d.

Теперь заметим, что $c_m \leqslant \underbrace{88\ldots8}_{r}$. Следовательно, $d > \underbrace{11\ldots1}_{r}$. Имеем:

$$\underbrace{88\ldots8}_{r} \geqslant c_m = c_1 + (m-1)d \geqslant (m-1)d > (m-1) \cdot \underbrace{11\ldots1}_{r},$$

откуда $m - 1 < 8$, то есть $m \leqslant 8$.

Итак, в каждой из i-групп не более восьми членов, а самих этих групп не более девяти. Следовательно, прогрессия содержит не более 72 членов.

г) Приведём пример такой прогрессии, состоящей из 72 членов. Её первый член равен 1, а разность равна 125:

1	126	251	376	501	626	751	876
1001	1126	1251	1376	1501	1626	1751	1876
2001	2126	2251	2376	2501	2626	2751	2876
3001	3126	3251	3376	3501	3626	3751	3876
4001	4126	4251	4376	4501	4626	4751	4876
5001	5126	5251	5376	5501	5626	5751	5876
6001	6126	6251	6376	6501	6626	6751	6876
7001	7126	7251	7376	7501	7626	7751	7876
8001	8126	8251	8376	8501	8626	8751	8876

Задача 51. Ответ: а) да; б) четыре.

Решение. а) Да, может. Пример: 1, 2, 3.

б) В этой прогрессии может быть четыре члена: 1, 2, 3, 4. Покажем, что пяти членов в ней быть не может.

► Идея такова. Все члены нашей прогрессии не делятся на 5, то есть дают при делении на 5 ненулевые остатки (а именно, 1, 2, 3, 4). Если имеется пять членов прогресии, то обязательно найдутся два члена с равными остатками. А тогда окажется, что разность прогрессии кратна 5. Но она не может быть кратна 5 — это мы тоже докажем. ◄

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если три различных натуральных числа, не имеющие простых делителей кроме 2 и 3, образуют арифметическую прогрессию, то разность этой прогрессии не делится на 5.

Доказательство. Предположим, что числа $a = 2^{k_1} \cdot 3^{l_1}$, $b = 2^{k_2} \cdot 3^{l_2}$ и $c = 2^{k_3} \cdot 3^{l_3}$ образуют арифметическую прогрессию (k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3 — целые неотрицательные числа). Разность этой прогрессии обозначим d. Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей.

Пусть k_0 есть наименьшее из чисел k_1, k_2, k_3 и пусть l_0 есть наименьшее из чисел l_1, l_2, l_3. Ясно, что разложение разности прогрессии на простые множители имеет вид:

$$d = 2^{k_0} \cdot 3^{l_0} \cdot 5^m \cdot \ldots$$

(В самом деле, разность d обязана делиться на 2^{k_0}, но не может делиться на 2 в большей степени; аналогично дело обстоит с множителем 3^{l_0}.)

Поделим числа a, b, c, d на $2^{k_0} \cdot 3^{l_0}$. Получим новую арифметическую прогрессию, члены которой по-прежнему обозначим a, b, c. Новую разность также обозначим d. Числа a, b, c, как и ранее, кратны лишь степеням двойки и тройки, а разность d теперь не делится ни на 2, ни на 3. Следовательно, в прогрессии теперь не могут идти подряд два чётных числа и два числа, кратные трём; в частности, прогрессия не содержит число, которое делится на 2 и на 3 одновременно. Кроме того, поскольку d нечётно, чётности чисел a, b, c чередуются (чётное–нечётное–чётное или нечётное–чётное–нечётное).

С учётом сформулированных ограничений мы получаем для нашей новой прогрессии лишь три возможности ($a = 1$, a кратно двум, a кратно трём). В каждом случае предполагаем, что d кратно 5, и приходим к противоречию. Во всех случаях k, l, m, n, p — натуральные числа.

1. Прогрессия имеет вид: 1, 2^k, 3^l. Тогда 2^k должно оканчиваться на 6, и потому $k = 4n$. Аналогично, 3^l должно оканчиваться на 1, и потому $l = 4p$.

   Таким образом, имеем арифметическую прогрессию: 1, 16^n, 81^p. Отсюда

   $$2 \cdot 16^n = 81^p + 1.$$

   Левая часть данного равенства делится на 16. Число 81 при делении на 16 даёт остаток 1; значит, и 81^p при делении на 16 даёт остаток 1. Тогда правая часть имеет остаток 2 при делении на 16. Противоречие.

2. Прогрессия имеет вид: 2^k, 3^l, 2^m. Напомним, что прогрессию мы считаем возрастающей, поэтому $m > k$. С необходимостью имеем $k = 1$; в противном случае второе число 3^l, равное полусумме первого и третьего чисел, окажется чётным. Но, если первое число равно 2, то 2^m оканчивается на 2 (поскольку $2d$ делится на 10), так что $m = 4p + 1$.

   Получаем:

   $$3^l = \frac{2^{4p+1} + 2}{2} = 16^p + 1.$$

   Левая часть этого равенства делится на 3, а правая часть при делении на 3 даёт остаток 2. Противоречие.

3. Прогрессия имеет вид: 3^k, 2^l, 3^m. Тогда $2 \cdot 2^l = 3^k + 3^m$. Правая часть этого равенства делится на 3, а левая — нет. Противоречие.

Противоречия, полученные во всех случаях, завершают доказательство леммы.

Предположим теперь, что пять различных натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию (с разностью d) и кратны лишь степеням двойки и тройки. Все эти числа дают ненулевые остатки при делении на 5. Поскольку ненулевых остатков всего четыре, у двух каких-то чисел эти остатки совпадают.

- Пусть остатки совпадают у двух соседних чисел:

$$a = 5k + r, \quad a + d = 5l + r$$

(k, l — целые; $r = 1, 2, 3, 4$). В таком случае разность прогрессии $d = 5(l - k)$ делится на 5. Однако в силу леммы это невозможно.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через одно:

$$a = 5k + r, \quad a + 2d = 5l + r.$$

Тогда $2d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 вопреки лемме.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через два:

$$a = 5k + r, \quad a + 3d = 5l + r.$$

Тогда $3d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 вопреки лемме.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через три, то есть у первого и последнего членов:

$$a = 5k + r, \quad a + 4d = 5l + r.$$

Тогда $4d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 — снова в противоречии с леммой.

Полученные противоречия показывают, что пяти членов в прогрессии быть не может. Больше пяти членов в прогрессии не может быть и подавно. Значит, в прогрессии может быть самое большее четыре члена.

Задача 52. Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) да.

Решение. а) ► Давайте выпишем для наглядности все 12 квадратов:

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2 \quad 9^2 \quad 10^2 \quad 11^2 \quad 12^2.$$

Нам пригодится знание пифагоровых троек: $3^2 + 4^2 = 5^2$ и $6^2 + 8^2 = 10^2$. Эти шесть квадратов можно выкинуть из списка, поскольку $3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 + 8^2 - 10^2 = 0$. Выпишем оставшиеся шесть квадратов:

$$1 \quad 4 \quad 49 \quad 81 \quad 121 \quad 144.$$

Замечаем, что $144 - 121 = 23$, $81 - 49 = 32$; результаты отличаются на 9, а $1 + 4 = 5$. Вот и готова четвёрка: $-1 - 4 - 49 + 81 + 121 - 144 = 4$.

При записи решения все эти размышления остаются «за кадром», и мы приводим только пример нужной расстановки знаков. ◄

Да, может. Вот пример:

$$-1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 + 9^2 - 10^2 + 11^2 - 12^2 = 4.$$

б) В последовательности 1^2, 2^2, 3^2, …, 68^2, 69^2 содержится 35 нечётных чисел (и 34 чётных). Поскольку количество нечётных чисел нечётно, при любой расстановке знаков сумма этой последовательности окажется нечётной. Значит, эта сумма не может равняться нулю.

в) ► В арифметической прогрессии из четырёх чисел a, b, c, d мы можем расставить знаки так, чтобы получился нуль: $a - b - c + d = 0$.

Пусть имеется восемь последовательных квадратов: k^2, $(k+1)^2$, $\ldots$, $(k+7)^2$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&(k+1)^2 - k^2 = 2k+1,\\
&(k+3)^2 - (k+2)^2 = 2k+5,\\
&(k+5)^2 - (k+4)^2 = 2k+9,\\
&(k+7)^2 - (k+6)^2 = 2k+13.
\end{aligned}$$

Четыре числа $2k+1$, $2k+5$, $2k+9$, $2k+13$ образуют арифметическую прогрессию. Расставляя между ними знаки указанным выше образом, получим в сумме нуль. Таким образом, сумму восьми последовательных квадратов можно сделать равной нулю подходящей расстановкой знаков.

Переходим к записи решения. Прежде всего, как из шляпы фокусника, появляется полученный результат. ◄

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$-k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2 - (k+5)^2 - (k+6)^2 + (k+7)^2 = 0. \tag{36}$$

Таким образом, сумму квадратов восьми последовательных целых чисел можно сделать равной нулю подходящей расстановкой знаков.

В нашем случае имеется 64 квадрата: 1^2, 2^2, $\ldots$, 64^2. Разобьём их на 8 равных последовательных отрезков по 8 квадратов:

$$1^2,\, 2^2,\, \ldots,\, 8^2; \quad 9^2,\, 10^2,\, \ldots,\, 16^2; \quad \ldots \quad ; \quad 57^2,\, 58^2,\, \ldots,\, 64^2.$$

Сумму чисел каждого отрезка можно сделать равной нулю, расставляя знаки так, как в (36). Тем самым общая сумма окажется равной нулю.

г) Заметим, что $1^2 + 2^2 = 5$. Остальные 88 квадратов 3^2, 4^2, $\ldots$, 90^2 разобьём на 11 равных последовательных отрезков по 8 квадратов и расставим внутри каждого отрезка знаки так, как в (36). Тем самым сумма этих 88 квадратов обратится в нуль, а общая сумма будет равна 5.

Задача 53. Ответ: а) нет; б) нет; в) $39\frac{1}{21}$.

Решение. а) Представим число 40 в виде следующей суммы:

$$40 = \underbrace{\frac{40}{41} + \frac{40}{41} + \ldots + \frac{40}{41}}_{41 \text{ слагаемое}}.$$

Каково бы ни было разбиение этих 41 слагаемых на две группы, в одной из этих групп окажется не менее 21 числа. Тогда сумма чисел в этой группе будет больше или равна

$$21 \cdot \frac{40}{41} = \frac{840}{41} > \frac{820}{41} = 20.$$

Следовательно, число S не может равняться 40.

б) Предположим, что

$$S > 39\,\frac{1}{21} = \frac{820}{21}.$$

Представим S в виде суммы:

$$S = \underbrace{\frac{S}{41} + \frac{S}{41} + \ldots + \frac{S}{41}}_{41 \text{ слагаемое}}.$$

Число S не превосходит 40 (ведь S по условию является суммой двух групп чисел, а в каждой группе сумма не больше 20), поэтому каждое из слагаемых $S/41$ меньше единицы. Теперь повторяются рассуждения предыдущего пункта: каково бы ни было разбиение этих слагаемых на две группы, одна из групп будет содержать не менее 21 числа. Сумма чисел в этой группе окажется больше или равна

$$21 \cdot \frac{S}{41} > 21 \cdot \frac{820}{21 \cdot 41} = 20.$$

Значит, S не может быть больше $39\frac{1}{21}$.

в) Из результата пункта б) следует оценка:

$$S \leqslant 39\frac{1}{21}\,. \tag{37}$$

Покажем, что число $39\frac{1}{21}$ удовлетворяет условию задачи. Возьмём произвольное представление:

$$39\frac{1}{21} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{38}$$

в котором числа a_1, a_2, …, a_n положительны и не превосходят единицы. Будем считать для определённости, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$.

Нужное нам разбиение слагаемых в (38) на две группы мы построим следующим образом. К первой группе относим наибольшее первое слагаемое и все идущие за ним до тех пор, пока их сумма не превосходит 20. Более точно, найдётся слагаемое a_p такое, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p \leqslant 20,$$

и в то же время

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{p+1} > 20.$$

Так вот, первую группу составят числа a_1, …, a_p, а вторую группу — числа a_{p+1}, …, a_n.

Обозначим через A сумму чисел в первой группе:

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_p. \tag{39}$$

Имеем:

$$\begin{gathered} A \leqslant 20, \\ A + a_{p+1} > 20. \end{gathered} \tag{40}$$

Поскольку $a_{p+1} \leqslant 1$, из неравенства (40) следует, что $A > 19$. Тогда (39) приводит нас к неравенству $p > 19$ (ведь все слагаемые не превосходят 1); а так как p целое, то

$$p \geqslant 20. \tag{41}$$

Перепишем (40) в виде:

$$a_{p+1} > 20 - A.$$

Вспоминая, что слагаемые в (39) расположены по убыванию, имеем также: $a_p > 20 - A$, …, $a_2 > 20 - A$, $a_1 > 20 - A$. Тогда из (39) и (41) последовательно получаем:

$$A > \underbrace{(20 - A) + (20 - A) + \ldots + (20 - A)}_{p \text{ слагаемых}} = p(20 - A) \geqslant 20(20 - A).$$

Отсюда

$$A > \frac{400}{21}\,.$$

Теперь для суммы чисел во второй группе имеем:

$$a_{p+1} + \ldots + a_n = 39\frac{1}{21} - A = \frac{820}{21} - A < \frac{820}{21} - \frac{400}{21} = \frac{420}{21} = 20.$$

Итак, во второй группе сумма чисел меньше 20, что и требовалось. Значит, для числа $39\frac{1}{21}$ условия задачи выполнены. Вместе с оценкой (37) это доказывает, что $39\frac{1}{21}$ — максимально возможное значение S.

Задача 54. Ответ: а) 45; б) 12.

Решение. Пусть по кругу расставлены числа $a_1, a_2, \ldots, a_{48}$. Количество положительных чисел среди них обозначим p.

а) Поскольку сумма всех чисел равна 20, среди них есть как положительные, так и отрицательные. Поэтому $p \neq 48$.

Пусть $p = 47$. В этом случае сумма положительных чисел не менее 47. Но тогда единственное отрицательное число меньше или равно -27 и потому отличается от соседних чисел более чем на 7. Это противоречит условию. Значит, $p \neq 47$.

Пусть $p = 46$. Сумма положительных чисел не менее 46. Отрицательных чисел всего два, и их сумма меньше или равна -26. Значит, одно из отрицательных чисел меньше или равно -13. Это число отличается от соседнего положительного числа более чем на 7. Поэтому $p \neq 46$.

Приведём пример, когда $p = 45$. Положим

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{45} = 1,\ a_{46} = -6,\ a_{47} = -13,\ a_{48} = -6.$$

Сумма этих чисел равна:

$$45 - 6 - 13 - 6 = 20.$$

Легко видеть, что и остальные условия задачи выполнены. Следовательно, наибольшее возможное значение p равно 45.

б) Из того, что среди любых четырёх подряд идущих чисел имеется хотя бы одно положительное, следует, что

$$p \geqslant 12. \tag{42}$$

В самом деле, разобьём наши 48 чисел на 12 четвёрок:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4),\ (a_5, a_6, a_7, a_8),\ \ldots,\ (a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{48}).$$

Если $p < 12$, то по крайней мере в одной четвёрке не будет положительного числа — вопреки условию.

Остаётся предъявить пример с $p = 12$. Пусть

$$\underbrace{a_4 = a_8 = a_{12} = \ldots = a_{44}}_{11\ \text{чисел}} = 5,\ a_{48} = 1,$$

а остальные 36 чисел равны -1. Сумма этих чисел:

$$11 \cdot 5 + 1 - 36 = 20.$$

Остальные условия задачи в данном примере также выполнены. Этот пример и оценка (42) доказывают, что наименьшее возможное значение p равно 12.

Задача 55. Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Решение. Пусть A, B, C и D — суммы чисел в четырёх группах. Согласно условию нас интересует сумма:

$$S = |A - B| + |A - C| + |A - D| + |B - C| + |B - D| + |C - D|. \tag{43}$$

Ясно, что S — целое неотрицательное число.

Отметим сразу же, что

$$A + B + C + D = 1 + 2 + \ldots + 12 = 78. \tag{44}$$

а) Предположим, что $S = 0$. Тогда все шесть слагаемых в (43) равны нулю, что немедленно даёт $A = B = C = D$. Но это невозможно ввиду (44), поскольку 78 не делится на 4. Следовательно, 0 в результате получиться не может.

б) Предположим, что $S = 1$. Тогда одно слагаемое в (43) равно единице, а остальные пять слагаемых равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что $|A - B| = 1$. Но тогда из $|A - C| = 0$ и $|B - C| = 0$ получаем соответственно $A = C$ и $B = C$, то есть $A = B$. Возникшее противоречие показывает, что 1 в результате получиться не может.

в) Заметим, что имеется самое большее три слагаемых в (43), которые не содержат фиксированную букву (например, букву D не содержат слагаемые $|A - B|$, $|B - C|$ и $|A - C|$). Поэтому если взять любые четыре слагаемых в (43), то в них непременно будут фигурировать все четыре буквы A, B, C, D.

Таким образом, если четыре каких-то слагаемых в (43) равны нулю, то $A = B = C = D$. Данное равенство, как было отмечено выше, невозможно. Следовательно, *никакие четыре слагаемых в* (43) *не могут равняться нулю.*

Иными словами, как минимум три слагаемых в (43) должны быть отличны от нуля. Тем самым оказывается невозможным случай $S = 2$.

Предположим, что $S = 3$. Тогда три слагаемых в (43) равны единице, а остальные три — нулю. При этом нулю могут равняться лишь такие три слагаемых, которые не содержат некоторой буквы (в противном случае — когда в трёх нулевых слагаемых фигурируют все четыре буквы A, B, C, D — остальные три слагаемых также обратятся в нуль).

Пусть, например, $|A - B| = |A - C| = |B - C| = 0$, то есть $A = B = C$. Тогда $D = A \pm 1$, и

$$78 = A + B + C + D = 4A \pm 1.$$

Получаем противоречие: слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Значит, $S = 3$ невозможно.

Приведём пример с $S = 4$. Группы возьмём такие:

$$(1, 3, 4, 5, 6), \quad (2, 7, 10), \quad (9, 11), \quad (8, 12).$$

Здесь $A = 19$, $B = 19$, $C = 20$, $D = 20$. Подставляем в (43):

$$S = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4.$$

Тем самым доказано, что наименьшее возможное значение S равно 4.

Задача 56. Ответ: а) 8; б) на 5/56.

Решение. а) Пусть ученик имеет n оценок и S — их сумма. Тогда:

$$\frac{S}{n} = 4{,}625 = 4\,\frac{5}{8} = \frac{37}{8}\,.$$

Отсюда $37n = 8S$, так что n делится на 8. Поэтому $n \geqslant 8$.

Приведём пример с $n = 8$. Пусть ученик имеет семь пятёрок и двойку. Тогда его средний балл:

$$\frac{7 \cdot 5 + 2}{8} = \frac{37}{8}\,.$$

Итак, наименьшее возможное количество оценок ученика равно 8.

б) Пусть ученик имел оценки 3, 3, 5, 5, a_1, a_2, ..., a_k. Обозначим

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Заметим сразу, что

$$A \leqslant 5k. \tag{45}$$

Посмотрим, какие ограничения на k накладывает тот факт, что средний балл равен 4,675. Сумма оценок ученика равна $16 + A$, количество оценок равно $4 + k$, так что

$$\frac{16 + A}{4 + k} = \frac{37}{8}\,.$$

Отсюда легко получаем:

$$8A = 37k + 20. \tag{46}$$

Правая часть $37k + 20$ должна делиться на 8. Число 20 при делении на 8 даёт остаток 4. Значит, $37k$ при делении на 8 также должно давать остаток 4. Какой остаток даёт само k? Поскольку $37k = 32k + 5k$ и $32k$ делится на 8, число $5k$ при делении на 8 даёт остаток 4. Перебирая остатки от 0 до 7, легко видим, что и k даёт остаток 4:

$$k = 8m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{47}$$

Подставляем это в (46):

$$8A = 37(8m + 4) + 20 = 37 \cdot 8m + 168,$$

и после сокращения на 8 получим:

$$A = 37m + 21. \tag{48}$$

Теперь подставляем (47) и (48) в неравенство (45):

$$37m + 21 \leqslant 5(8m + 4),$$

откуда $3m \geqslant 1$, то есть $m \geqslant 1$. Вместе с (47) это даёт нам нужное неравенство на k:

$$k \geqslant 12.$$

Пусть теперь оценки ученика стали 4, 4, a_1, a_2, ..., a_k. Сумма оценок равна $8+A$, количество оценок равно $2 + k$. Находим изменение среднего балла:

$$\Delta = \frac{8 + A}{2 + k} - \frac{37}{8} = \frac{64 + 8A - 37(2 + k)}{8(2 + k)} = \frac{8A - 37k - 10}{8(2 + k)}\,.$$

С учётом (46) имеем:

$$\Delta = \frac{10}{8(2 + k)} = \frac{5}{4(2 + k)}\,.$$

Максимальное значение Δ достигается при минимально возможном значении k, равном 12:

$$\Delta_{\max} = \frac{5}{4(2 + 12)} = \frac{5}{56}\,.$$

Таким образом, максимальное увеличение среднего балла составляет $5/56$.

Задача 57. Ответ: а) 24; б) 4032.

Решение. а) Пусть L — длина мотка верёвки. Коль скоро его можно разрезать на 24 стандартных куска, выполнено неравенство $L \geqslant 168 \cdot 24$. А так как не все куски имеют одинаковую длину, неравенство является строгим: $L > 168 \cdot 24$.

По тем же самым причинам справедливо неравенство $L < 175 \cdot 24$. Итак,

$$168 \cdot 24 < L < 175 \cdot 24.$$

Теперь заметим, что $168 = 7 \cdot 24$ и $175 = 7 \cdot 25$. Поэтому $175 \cdot 24 = 7 \cdot 25 \cdot 24 = 168 \cdot 25$, и мы получаем новое двойное неравенство для L:

$$168 \cdot 24 < L < 168 \cdot 25. \tag{49}$$

Предположим, что моток можно разрезать на $n \geqslant 25$ стандартных кусков одинаковой длины. Тогда имеем неравенство

$$L \geqslant 168n \geqslant 168 \cdot 25,$$

которое противоречит неравенству (49). Следовательно, $n \leqslant 24$.

Покажем, что наш моток можно разрезать на 24 одинаковых стандартных куска. Из неравенства (49) следует, что $L = 168 \cdot 24 + x$, где $x < 168$. Разрежем моток на 24 куска одинаковой длины; тогда длина d одного куска равна:

$$d = 168 + \frac{x}{24}\,.$$

С одной стороны, $d > 168$. С другой стороны,

$$d < 168 + \frac{168}{24} = 168 + 7 = 175.$$

Итак, $168 < d < 175$, так что куски являются стандартными. Следовательно, данный моток разрезается самое большее на 24 одинаковых стандартных куска.

б) Сформулируем и решим задачу в общем виде — тем самым яснее проявится идея её решения.

Пусть a и b — натуральные числа ($a < b$). Всякое число, расположенное на отрезке $[a; b]$, называем *стандартным*. Нам надо найти такое наименьшее число l, что любое число $L > l$ можно представить в виде суммы стандартных слагаемых.

Существует наибольшее натуральное n, для которого выполнено неравенство

$$(n-1)b < na.$$

В самом деле, нетрудно видеть, что это есть наибольшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству $n < b/(b-a)$. Обозначим его n_0:

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}\colon (n-1)b < na\} = \max\left\{n \in \mathbb{N}\colon n < \frac{b}{b-a}\right\}. \tag{50}$$

Пусть сначала $l < n_0 a$. Покажем, что найдётся $L > l$, не представимое в виде суммы стандартных слагаемых. Возьмём L таким, что $\max\{l, n_0 a - 1\} < L < n_0 a$. Иными словами, мы выбираем число L, одновременно удовлетворяющее двум условиям:

1) $L > l$;

2) $n_0a - 1 < L < n_0a$.

Поскольку $(n_0 - 1)b < n_0a$, из второго условия следует неравенство

$$(n_0 - 1)b < L < n_0a. \tag{51}$$

Предположим, что L равно сумме k стандартных слагаемых. Тогда $ka \leqslant L \leqslant kb$. Отсюда и из неравенства (51) следует, что одновременно выполнены неравенства $k > n_0 - 1$ и $k < n_0$. Полученное противоречие показывает, что L нельзя представить в виде суммы стандартных слагаемых.

► Чтобы лучше почувствовать эту ситуацию, возьмите $a = 4$, $b = 5$ и подумайте, почему число 15,5 не представляется в виде суммы стандартных слагаемых. ◄

Пусть теперь $l = n_0a$. Покажем, что любое число $L > l$ можно представить в виде суммы стандартных слагаемых.

Для любого L найдётся натуральное n такое, что $na \leqslant L < (n+1)a$. Поскольку выполнено $L > n_0a$, имеем $n + 1 > n_0$. Отсюда в соответствии с определением (50) числа n_0 заключаем, что $(n+1)a \leqslant nb$. Это даёт нам неравенство

$$na \leqslant L < nb,$$

или

$$a \leqslant \frac{L}{n} < b.$$

Следовательно, L можно представить в виде суммы n стандартных слагаемых, каждое из которых равно L/n.

Таким образом, мы нашли наименьшее l, такое, что любое число $L > l$ представляется суммой стандартных слагаемых. Это наименьшее l равно n_0a.

Остаётся применить полученные результаты к исходной задаче. Имеем: $a = 168$, $b = 175$, так что

$$\frac{b}{b-a} = \frac{175}{7} = 25.$$

Согласно (50) находим $n_0 = 24$. Тогда $l = n_0a = 24 \cdot 168 = 4032$.

Задача 58. Ответ: а) 30; б) 2.

Решение. а) Всего имеется $33 + 27 = 60$ коробок. Значит, в каждом контейнере должно находиться по 30 коробок.

Пусть x — количество лёгких (по 19 кг) коробок в первом контейнере. Тогда число тяжёлых (по 49 кг) коробок в первом контейнере равно $30 - x$. Во втором контейнере лёгких коробок получается $33 - x$, а тяжёлых коробок: $27 - (30 - x) = x - 3$.

Суммарные массы коробок в первом и втором контейнерах равны соответственно:

$$m_1 = 19x + 49(30 - x) = 1470 - 30x,$$
$$m_2 = 19(33 - x) + 49(x - 3) = 480 + 30x.$$

Отсюда:

$$S = |m_2 - m_1| = |60x - 990| = 30|2x - 33|.$$

Число $|2x - 33|$ является нечётным и принимает наименьшее возможное значение 1 при $x = 16$ или $x = 17$. Следовательно, наименьшее значение S равно 30.

б) Пусть в первом контейнере находится x лёгких коробок и y тяжёлых коробок. Тогда во втором контейнере будет $33 - x$ и $27 - y$ лёгких и тяжёлых коробок соответственно. Имеем:

$$m_1 = 19x + 49y,$$
$$m_2 = 19(33 - x) + 49(27 - y) = 1950 - 19x - 49y.$$

При этом имеют место неравенства:

$$x \leqslant 33, \quad y \leqslant 27. \tag{52}$$

Величина S равна:

$$S = |38x + 98y - 1950| = 2|19x + 49y - 975|.$$

Нам, таким образом, требуется найти минимальное значение S при условии, что выполнены оба неравенства (52).

Заметим, что возможен прямой перебор всех значений x и y ($0 \leqslant x \leqslant 33$, $0 \leqslant y \leqslant 27$), то есть последовательное рассмотрение всех $34 \cdot 28$ вариантов. Вообще, исчерпывающий перебор конечного числа вариантов — это полноценное решение задачи! Но мы, естественно, таким путём не пойдём и поищем способ избежать прямого перебора.

Прежде всего проверим, не может ли S равняться нулю. Для этого рассмотрим уравнение:

$$19x + 49y = 975. \tag{53}$$

Будем использовать остатки от деления на 7. Перепишем уравнение (53) следующим образом:

$$5x + 14x + 49y = 975.$$

Нетрудно проверить, что 975 даёт остаток 2 ($975 = 139 \cdot 7 + 2$). Значит, и слагаемое $5x$ даёт остаток 2 (ведь остальные слагаемые в левой части делятся на 7). Какой остаток при этом даёт сам x? Перебор остатков от 0 до 6 показывает, что единственная возможность — это остаток 6, то есть

$$x = 7k + 6. \tag{54}$$

Подставляем (54) в (53)

$$19(7k + 6) + 49y = 975,$$
$$19 \cdot 7k + 49y = 861,$$

и после сокращения на 7:

$$19k + 7y = 123. \tag{55}$$

Благодаря этому сокращению уравнение (55) проще уравнения (53). Давайте повторим всю эту процедуру — теперь уже применительно к уравнению (55). Начинаем так же:

$$5k + 14k + 7y = 123.$$

Правая часть 123 даёт остаток 4 ($123 = 17 \cdot 7 + 4$). Значит, и $5k$ даёт остаток 4. Тогда k может давать только остаток 5:

$$k = 7m + 5. \tag{56}$$

Подставляя (56) в (54), получим: $x = 7(7m+5)+6 = 49m+41$. Таким образом, оказывается, что $x \geqslant 41$ — вопреки первому неравенству (52).

Итак, уравнение (53) не имеет решений, удовлетворяющих условию (52). Поэтому $S \neq 0$.

► А какие решения есть? Давайте всё же доведём до конца решение уравнения (53) — полезно посмотреть, чем дело кончится. Подставим (56) в (55):

$$19(7m+5)+7y=123,$$
$$19\cdot 7m+7y=28,$$
$$19m+y=4.$$

Отсюда видно, что единственная возможность — это $m=0$ и $y=4$. Остаётся найти x. Из (56) и (54) последовательно получаем: $k=7\cdot 0+5=5$, $x=7\cdot 5+6=41$.

Итак, уравнение (53) имеет единственное решение $(41,4)$ в натуральных числах. Это решение не удовлетворяет условию (52). ◄

Поскольку S является чётным числом, имеем оценку: $S\geqslant 2$. Равенство достигается, например, в случае $x=23$ и $y=11$:

$$S=2\cdot|19\cdot 23+49\cdot 11-975|=2\cdot|976-975|=2.$$

Следовательно, наименьшее значение S равно 2.

► Как найден пример? Берём уравнение $19x+49y=976$ и решаем его тем же способом — через остатки от деления на 7. Упражняйтесь! ◄

Задача 59. Ответ: а) да; б) 10; в) 8/17.

Решение. Пусть m — число мальчиков, d — число девочек в группе. Пусть m_1 мальчиков сходили в театр, m_2 мальчиков сходили в кино, d_1 девочек сходили в театр, d_2 девочек сходили в кино.

Для случая похода в театр имеем:

$$m_1\leqslant\frac{3}{11}(m_1+d_1)\Rightarrow 8m_1\leqslant 3d_1.$$

Для случая посещения кино:

$$m_2\leqslant\frac{3}{7}(m_2+d_2)\Rightarrow 4m_2\leqslant 3d_2.$$

Сложим первое из полученных неравенств с удвоенным вторым:

$$8(m_1+m_2)\leqslant 3d_1+6d_2.$$

Поскольку каждый мальчик сходил либо в театр, либо в кино, имеем $m_1+m_2\geqslant m$. Кроме того, очевидно, $d_1\leqslant d$ и $d_2\leqslant d$. Получаем:

$$8m\leqslant 8(m_1+m_2)\leqslant 3d+6d,$$

то есть

$$8m\leqslant 9d. \tag{57}$$

а) Да, 10 мальчиков могло быть в группе из 20 учащихся. Например, в театр сходили 3 мальчика и все 10 девочек, в кино — остальные 7 мальчиков и 10 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3\leqslant\frac{3}{11}\cdot(3+10),\quad 7\leqslant\frac{3}{7}\cdot(7+10).$$

► Как построен пример? Прежде всего, значения $m = 10$ и $d = 10$ не противоречат неравенству (57), и это наводит на мысль, что пример тут возможен. Затем берём неравенства $8m_1 \leqslant 3d_1$ и $4m_2 \leqslant 3d_2$, задействуем девочек по максимуму ($d_1 = d_2 = 10$) и находим подходящие m_1 и m_2. ◄

б) Предположим, что в группе из 20 учащихся имеется не менее 11 мальчиков: $m \geqslant 11$. Тогда $d \leqslant 9$. Имеем: $8m \geqslant 88$, $9d \leqslant 81$, что противоречит неравенству (57). Следовательно, $m \leqslant 10$, и с учётом пункта а) приходим к выводу, что наибольшее возможное количество мальчиков в группе равно 10.

в) Перепишем неравенство (57) следующим образом:

$$8m \leqslant 9d \;\Rightarrow\; \frac{m}{d} \leqslant \frac{9}{8} \;\Rightarrow\; \frac{m}{d} + 1 \leqslant \frac{17}{8} \;\Rightarrow\; \frac{m+d}{d} \leqslant \frac{17}{8} \;\Rightarrow\; \frac{d}{m+d} \geqslant \frac{8}{17}.$$

Как видим, доля девочек не меньше $8/17$. Приведём пример, когда равенство достигается. Пусть в группе 9 мальчиков и 8 девочек. В театр сходили 3 мальчика и 8 девочек, в кино сходили 6 мальчиков и 8 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \leqslant \frac{3}{11} \cdot (3+8), \quad 6 \leqslant \frac{3}{7} \cdot (6+8).$$

Следовательно, наименьшая возможная доля девочек равна $8/17$.

Задача 60. Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Решение. Присвоим каждой карточке номер от 1 до 10. Пусть a_1, a_2, ..., a_{10} — числа, данные в условии и записанные на карточках вначале (число a_k записано на карточке с номером k). Аналогично, b_1, b_2, ..., b_{10} — числа того же набора, но записанные на карточках после их перемешивания. Согласно условию рассматривается число:

$$c = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_{10} + b_{10}). \tag{58}$$

а) Предположим, что $c = 0$. Тогда в произведении (58) найдётся нулевой множитель, то есть $a_k + b_k = 0$ для некоторого k. Но это невозможно, так как в данном наборе ни для какого числа a_k нет ему противоположного по знаку. Значит, 0 получиться не может.

б) Предположим, что c нечётно. Тогда в произведении (58) каждый множитель должен быть нечётным, то есть $a_k + b_k$ нечётно для любого k ($1 \leqslant k \leqslant 10$).

Следовательно, для каждого k в паре (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Поэтому в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$ окажется 10 чётных и 10 нечётных чисел. Однако из условия вытекает, что указанная последовательность содержит 8 чётных чисел и 12 нечётных.

Возникшее противоречие показывает, что c обязано быть чётным. В частности, 1 получиться не может.

в) Далее считаем, что $c > 0$. Предположим, что $c = 2$. Тогда в произведении (58) ровно один из множителей по модулю равен 2, а все остальные по модулю равны 1. Иными словами, $a_m + b_m = \pm 2$ для некоторого m и $a_k + b_k = \pm 1$ для всех остальных k.

Числа a_m и b_m оба чётные или оба нечётные. В каждой из остальных девяти пар (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Стало быть, в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$ окажется или 11 чётных и 9 нечётных чисел (если a_m и b_m чётны), или, наоборот, 9 чётных и 11 нечётных чисел (если a_m и b_m нечётны). Но, как было указано выше, чётных и нечётных чисел в этой последовательности имеется 8 и 12 соответственно.

Значит, случай $c = 2$ невозможен. Поскольку c чётно, имеем оценку: $c \geqslant 4$.

Приведём пример, в котором достигается равенство $c = 4$. Пусть сначала на карточках написаны числа в исходном порядке:

$$1,\ -2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 7,\ -8,\ 9,\ 10,\ -11.$$

Затем на тех же карточках оказались числа:

$$-2,\ 1,\ 4,\ -3,\ 7,\ -5,\ 9,\ -8,\ -11,\ 10.$$

Получаем:

$$c = (1-2)(-2+1)(-3+4)(4-3)(-5+7)(7-5)(-8+9)(9-8)(10-11)(-11+10) = 4.$$

Следовательно, наименьшее неотрицательное значение c равно 4.

Задача 61. Ответ: а) 1; б) 39.

Решение. а) В последовательности не менее одного члена. Но последовательность, состоящая из одного числа 163, удовлетворяет условию задачи. Поэтому наименьшее возможное число членов последовательности равно 1.

б) Заметим прежде всего, что последовательность не может состоять только из чередующихся чисел 1 и 7. В самом деле, если такая последовательность содержит чётное число членов, то её сумма делится на 8. Если же число членов нечётно, то при делении суммы последовательности на 8 могут получиться только остатки 1 или 7 — в случаях $(1, 7, \ldots, 1, 7, 1)$ и $(7, 1, \ldots 7, 1, 7)$ соответственно. Однако число 163 при делении на 8 даёт остаток 3.

Стало быть, в последовательности имеется число b, отличное от 1 и 7. Ясно, что $b \geqslant 11$.

Покажем, что в последовательности не может быть более 39 чисел. Предположим обратное: пусть в последовательности имеется не менее 40 членов. Первые 40 чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{40} этой последовательности разобьём на пары: (a_1, a_2), (a_3, a_4), $\ldots$, (a_{39}, a_{40}). Имеются две возможности.

1. Число b не попадает ни в одну из этих первых 20 пар. Поскольку сумма чисел в каждой паре не менее 8, сумма всех членов последовательности будет не менее $8 \cdot 20 + b \geqslant 171$ вопреки условию.

2. Число b попадает в одну из первых 20 пар. Сумма чисел в этой паре не менее $1 + 11 = 12$, сумма чисел во всех оставшихся 19 парах не менее $19 \cdot 8 = 152$. Тогда сумма последовательности оказывается не менее $12 + 152 = 164$, а это снова противоречит условию.

Таким образом, последовательность содержит менее 40 членов. Предъявим пример последовательности, удовлетворяющей условию и состоящей из 39 членов. Она состоит из 19 пар $(7, 1)$ и заканчивается числом 11:

$$\underbrace{7, 1, 7, 1, \ldots, 7, 1}_{19\ \text{пар}}, 11.$$

Действительно, сумма такой последовательности равна $19 \cdot 8 + 11 = 163$.

Итак, наибольшее возможное число членов последовательности равно 39.

Задача 62. Ответ: а) нет; б) да; в) через 8 минут.

Решение. а) Все числа, которые выписывает Вася, будут делиться на 7. Но число 2012 не делится на 7 и потому никогда не появится на доске.

б) ► Поскольку все числа, появляющиеся на доске, кратны 7, можно убрать множитель 7 и начать с единицы. Таким образом, нам нужно получить в сумме число $63 : 7 = 9$. Пример строится легко:

$$1 \to 2\,(= 1 \cdot 2) \to 4\,(= 2 \cdot 2) \to 2\,(= 1 \cdot 2); \quad 1 + 2 + 4 + 2 = 9.$$

Построив нужный пример для числа 9, мы умножаем все числа на 7 и приводим пример для 63. ◄

Да, может. Пример:

$$7 \to 14\,(= 7 \cdot 2) \to 28\,(= 14 \cdot 2) \to 14\,(= 7 \cdot 2); \quad 7 + 14 + 28 + 14 = 63.$$

в) Поскольку все числа возникающей последовательности имеют общий множитель 7, мы можем все члены последовательности разделить на 7. Таким образом, сначала на доске написано число 1, Вася совершает описанные в условии операции, и вопрос ставится так: через какое наименьшее время на доске может появиться число 112 (=784 : 7)?

► Чувствуется, что мы доберёмся до 112 за наименьшее время, если будем умножать последнее число на 2 столько, сколько возможно. Начинаем:

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64.$$

Дальше умножать на 2 уже нельзя, поэтому ограничиваемся сложением: $64 + 32 = 96$, $96 + 16 = 112$. Остаётся доказать «минимальность» найденной последовательности. ◄

Покажем, что семи минут Васе не хватит. Через семь минут на доске будет последовательность 1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7. Если при переходе к числу a_{k+1} число a_k не умножается на 2, то оно увеличивается максимум в полтора раза (когда к нему прибавляется предыдущее число). Поэтому имеем: $a_1 = 2$, $a_2 \leqslant 4$, $a_3 \leqslant 8$, $a_4 \leqslant 16$, $a_5 \leqslant 32$, $a_6 \leqslant 64$ и, наконец, $a_7 \leqslant 64 + 32 = 96 < 112$.

Вася может уложиться в восемь минут. Пример:

$$1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{3} 8 \xrightarrow{4} 16 \xrightarrow{5} 32 \xrightarrow{6} 64 \xrightarrow{7} 96 \xrightarrow{8} 112.$$

Таким образом, число 112 может появиться самое меньшее через восемь минут.

Задача 63. Ответ: а) да; б) нет; в) 11.

Решение. а) Приведём пример арифметической прогрессии из 50 членов, содержащей ровно 6 целых чисел. Первый член равен $1/8$, разность прогрессии тоже равна $1/8$:

$$\underbrace{\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \ldots, \frac{7}{8}, 1,}_{8\text{ чисел}} \underbrace{1\frac{1}{8}, 1\frac{2}{8}, \ldots, 1\frac{7}{8}, 2,}_{8\text{ чисел}} \ldots, \underbrace{5\frac{1}{8}, 5\frac{2}{8}, \ldots, 5\frac{7}{8}, 6,}_{8\text{ чисел}}\ 6\frac{1}{8}, 6\frac{2}{8}.$$

б) Предположим, что прогрессия содержит ровно 29 целых чисел. В таком случае у неё нецелая разность (иначе все члены прогрессии были бы или целыми, или нецелыми), и потому вслед за целым числом идёт нецелое. Следовательно, прогрессия содержит также как минимум 28 нецелых чисел. Всего членов прогресии получается не менее $29 + 28 = 57 > 50$ — противоречие. Значит, прогрессия не может содержать ровно 29 целых чисел.

в) ► Попробуем представить себе, как может быть устроена арифметическая прогрессия, в которой имеется k целых чисел, а остальные — нецелые. Вообще говоря, так:

$$\underbrace{*\ldots*}_{p}\ \boxed{z_1}\ \underbrace{*\ldots*}_{m}\ \boxed{z_2}\ \underbrace{*\ldots*}_{m}\ \boxed{z_3}\ \cdots\ \boxed{z_{k-1}}\ \underbrace{*\ldots*}_{m}\ \boxed{z_k}\ \underbrace{*\ldots*}_{q}$$

Здесь z_1, z_2, …, z_k — целые числа, а звёздочками обозначены нецелые числа. Таким образом, между каждой парой соседних целых чисел расположено одно и то же количество m нецелых; кроме того, прогрессия может начинаться с p нецелых чисел и заканчиваться q нецелыми числами ($p, q \leqslant m$).

Если всего имеется 50 членов прогрессии, то выполнено соотношение

$$50 = k + (k-1)m + p + q.$$

Располагая этими наводящими соображениями, можно переходить к строгим доказательствам. ◄

Покажем, что прогрессия может содержать ровно 1, 2, …, 10 целых чисел. Нетрудно было бы привести десять конкретных примеров, но нам поможет сэкономить время и место следующая лемма.

Лемма. Предположим, что выполнено равенство

$$50 = k + (k-1)m + p + q, \tag{59}$$

где k и m — натуральные числа, а p и q — целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant p, q \leqslant m$. Тогда существует арифметическая прогрессия из 50 чисел, содержащая ровно k целых чисел.

Доказательство. Приведём пример нужной прогрессии. Её первый член равен $1 - \frac{p}{m+1}$, а разность равна $\frac{1}{m+1}$:

$$\underbrace{1 - \frac{p}{m+1}, \ldots, 1 - \frac{1}{m+1}}_{p},$$

$$1, \underbrace{1 + \frac{1}{m+1}, \ldots, 1 + \frac{m}{m+1}}_{m},$$

$$2, \underbrace{2 + \frac{1}{m+1}, \ldots, 2 + \frac{m}{m+1}}_{m},$$

$$\ldots$$

$$k-1, \underbrace{k-1 + \frac{1}{m+1}, \ldots, k-1 + \frac{m}{m+1}}_{m},$$

$$k, \underbrace{k + \frac{1}{m+1}, \ldots, k + \frac{q}{m+1}}_{q}.$$

Эта прогрессия содержит k целых чисел: $1, 2, \ldots, k$. Остальные выписанные числа являются нецелыми. Всего выписано чисел: $p + k + (k-1)m + q = 50$. Лемма доказана.

Теперь выпишем десять представлений числа 50 в виде (59):

$$\begin{aligned}
50 &= 1 + 0 \cdot 49 + 49 + 0 \quad (k = 1,\ m = 49,\ p = 49,\ q = 0),\\
50 &= 2 + 1 \cdot 48 + 0 + 0 \quad (k = 2,\ m = 48,\ p = 0,\ q = 0),\\
50 &= 3 + 2 \cdot 23 + 1 + 0 \quad (k = 3,\ m = 23,\ p = 1,\ q = 0),\\
50 &= 4 + 3 \cdot 14 + 4 + 0 \quad (k = 4,\ m = 14,\ p = 4,\ q = 0),\\
50 &= 5 + 4 \cdot 11 + 1 + 0 \quad (k = 5,\ m = 11,\ p = 1,\ q = 0),\\
50 &= 6 + 5 \cdot 8 + 4 + 0 \quad (k = 6,\ m = 8,\ p = 4,\ q = 0),
\end{aligned}$$

$$50 = 7 + 6 \cdot 7 + 1 + 0 \quad (k = 7,\ m = 7,\ p = 1,\ q = 0),$$
$$50 = 8 + 7 \cdot 6 + 0 + 0 \quad (k = 8,\ m = 6,\ p = 0,\ q = 0),$$
$$50 = 9 + 8 \cdot 5 + 1 + 0 \quad (k = 9,\ m = 5,\ p = 1,\ q = 0),$$
$$50 = 10 + 9 \cdot 4 + 4 + 0 \quad (k = 10,\ m = 4,\ p = 4,\ q = 0).$$

Из леммы следует тогда, что наша прогрессия может содержать ровно 1, 2, ..., 10 целых чисел.

► Если $k = 11$, то число 50 не получается представить в виде (59). Это наводит на мысль, что 11 является искомым числом. ◄

Теперь покажем, что в нашей прогрессии не может быть ровно 11 целых чисел. Предположим обратное: прогрессия из 50 чисел содержит ровно 11 целых чисел.

Ясно, что разность прогрессии d является нецелым рациональным числом. В самом деле, если a_s и $a_t > a_s$ — соседние целые члены прогрессии, то $d = (a_t - a_s)/(t - s)$. Запишем d в виде несократимой дроби: $d = \frac{l}{m+1}$ (l — целое, m — натуральное). Тогда между a_s и a_t находится в точности m нецелых чисел:

$$a_s + \frac{l}{m+1},\ a_s + \frac{2l}{m+1},\ \ldots,\ a_s + \frac{ml}{m+1}.$$

Итак, в прогрессии имеется: 1) 11 целых чисел; 2) 10 промежутков между ними, содержащих по m нецелых чисел; 3) p нецелых чисел перед первым целым числом и q нецелых чисел после последнего целого числа ($0 \leqslant p, q \leqslant m$). Следовательно, должно быть выполнено равенство

$$50 = 11 + 10m + p + q,$$

или

$$10m + p + q = 39.$$

Из этого равенства видно, что $m \leqslant 3$, и тогда $p + q \geqslant 9$. Но с другой стороны, оба числа p и q не превосходят m, поэтому $p + q \leqslant 6$. Полученное противоречие показывает, что в прогрессии не может быть ровно 11 целых чисел.

Таким образом, наименьшее число n, при котором наша прогрессия не может содержать ровно n целых чисел, равно 11.

Задача 64. Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Решение. а) Предположим, что в нашей последовательности три члена. Тогда она имеет вид: 1, a, 2046.

Если эти числа образуют арифметическую прогрессию, то $2a = 1 + 2046 = 2047$. Противоречие: левая часть чётна, а правая нечётна.

Если эти числа образуют геометрическую прогрессию, то $a^2 = 1 \cdot 2046 = 2046$. Снова противоречие: 2046 не является квадратом натурального числа ($45^2 = 2025 < 2046 < 46^2 = 2116$).

Поэтому три члена в последовательности быть не может.

б) Предположим, что в последовательности четыре члена: 1, a, b, 2046. Возможны четыре случая.

1. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию и вторые три числа образуют арифметическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют арифметическую прогрессию). Тогда имеем:
$$2a = 1 + b, \quad 2b = a + 2046.$$

Выражаем b из первого равенства и подставляем во второе:

$$b = 2a - 1 \ \Rightarrow\ 4a - 2 = a + 2046 \ \Rightarrow\ 3a = 2048.$$

Противоречие: левая часть делится на 3, а правая не делится.

2. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию, а вторые три числа образуют геометрическую прогрессию. Тогда:

$$2a = 1 + b, \quad b^2 = 2046a.$$

После исключения b:

$$(2a - 1)^2 = 2046a.$$

Слева стоит квадрат нечётного числа, который также является нечётным числом. Справа стоит чётное число. Противоречие.

3. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию, вторые три числа образуют арифметическую прогрессию. Тогда:

$$a^2 = b, \quad 2b = a + 2046.$$

Приходим к квадратному уравнению: $2a^2 - a - 2046 = 0$. Его дискриминант 16369 не является квадратом натурального числа ($127^2 < 16369 < 128^2$). Значит, это уравнение не имеет натуральных корней.

4. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию и вторые три числа образуют геометрическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют геометрическую прогрессию). Тогда:

$$a^2 = b, \quad b^2 = 2046a.$$

Отсюда $a^4 = 2046a$, то есть $a^3 = 2046$. Это невозможно, поскольку 2046 не является кубом натурального числа ($12^3 < 2046 < 13^3$).

Итак, в каждом случае получаем противоречие. Следовательно, данная последовательность не может состоять из четырёх членов.

в) В последовательности может быть менее 2046 членов. Вот пример арифметической прогрессии из шести чисел: 1, 410, 819, 1228, 1637, 2046.

► Сконструируем арифметическую прогрессию с первым членом 1 и n-м членом 2046. Пусть разность этой прогрессии равна d. Имеем:

$$2046 = 1 + (n - 1)d \ \Rightarrow\ (n - 1)d = 2045.$$

Полагаем $n = 6$, находим $d = 2045 : 5 = 409$ и выписываем прогрессию. ◄

Задача 65. Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Да, может: 216, 252, 294, 343. Это геометрическая прогрессия со знаменателем 7/6.

► Предположим, что четыре натуральных числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n:

$$a, \quad b = \frac{an}{m}\,, \quad c = \frac{an^2}{m^2}\,, \quad d = \frac{an^3}{m^3}\,.$$

Отсюда видно, что a делится на m^3, то есть $a = km^3$ для некоторого натурального k. Прогрессия приобретает вид:

$$km^3, \quad km^2n, \quad kmn^2, \quad kn^3.$$

Остаётся заметить, что $6^3 = 216 > 210$, $7^3 = 343 < 350$, и положить $k = 1$, $m = 6$, $n = 7$.

Данный пример позволяет почувствовать также, что втиснуть в интервал от 210 до 350 пять чисел, образующих геометрическую прогрессию, уже вряд ли получится. Поэтому в пункте б) надо пытаться доказать, что это невозможно. ◀

б) Предположим, что прогрессия состоит из пяти натуральных чисел a, b, c, d, e. Знаменатель прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n. Запишем нашу прогрессию так:

$$a, \quad b = \frac{an}{m}, \quad c = \frac{an^2}{m^2}, \quad d = \frac{an^3}{m^3}, \quad e = \frac{an^4}{m^4}.$$

Отсюда видно, что a делится на m^4, то есть $a = km^4$ для некоторого натурального k. Прогрессия, стало быть, имеет вид:

$$km^4, \quad km^3n, \quad km^2n^2, \quad kmn^3, \quad kn^4.$$

Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей, так что $n > m$. Поскольку все члены прогрессии находятся между числами 210 и 350, имеем:

$$km^4 > 210, \tag{60}$$
$$kn^4 < 350. \tag{61}$$

Из неравенства (61) следует, что n может принимать только значения 2, 3 или 4. Рассмотрим эти три случая по отдельности.

- $n = 2$. Тогда $m = 1$. Имеем:

$$(60) \quad \Rightarrow \quad k > 210;$$
$$(61) \quad \Rightarrow \quad k < \frac{350}{2^4} < 21.$$

  Противоречие.

- $n = 3$. Тогда $m = 1$ или $m = 2$. Имеем:

$$(60) \quad \Rightarrow \quad k > \frac{210}{2^4} > 13;$$
$$(61) \quad \Rightarrow \quad k < \frac{350}{3^4} < 5.$$

  Противоречие.

- $n = 4$. Тогда $m = 1, 2$ или 3. Имеем:

$$(60) \quad \Rightarrow \quad k > \frac{210}{3^4} > 2;$$
$$(61) \quad \Rightarrow \quad k < \frac{350}{4^4} < 2.$$

  Снова противоречие.

Полученные противоречия показывают, что прогрессия не может состоять из пяти членов.

Задача 66. Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Решение. Разложим число 1512 на простые множители:

$$1512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7. \tag{62}$$

Пусть также $1512 = c_1c_2c_3c_4c_5$, где $c_1, \ldots, c_5$ — различные натуральные числа.

а) Предположим, что все пять чисел $c_1, \ldots, c_5$ образуют геометрическую прогрессию. Поскольку все эти числа натуральные, знаменатель прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n. Запишем нашу прогрессию так:

$$c_1, \quad c_2 = c_1\frac{n}{m}, \quad c_3 = c_1\frac{n^2}{m^2}, \quad c_4 = c_1\frac{n^3}{m^3}, \quad c_5 = c_1\frac{n^4}{m^4}.$$

Отсюда видно, что c_1 делится на m^4, то есть $c_1 = km^4$ для некоторого натурального k. Тогда наша прогрессия приобретает вид:

$$c_1 = km^4, \quad c_2 = km^3n, \quad c_3 = km^2n^2, \quad c_4 = kmn^3, \quad c_5 = kn^4.$$

Не теряя общности, можно считать, что прогрессия возрастающая. Тогда $n > m$. Перемножая числа $c_1, \ldots, c_5$, получим:

$$1512 = k^5m^{10}n^{10}.$$

Выходит, что 1512 делится на десятую степень некоторого натурального числа $n > 1$. Но разложение (62) числа 1512 на простые множители не содержит множителей в десятой степени. Полученное противоречие показывает, что числа $c_1, \ldots, c_5$ не могут образовывать геометрическую прогрессию.

б) Предположим, что числа c_1, c_2, c_3, c_4 образуют возрастающую геометрическую прогрессию:

$$c_1, \quad c_2 = c_1\frac{n}{m}, \quad c_3 = c_1\frac{n^2}{m^2}, \quad c_4 = c_1\frac{n^3}{m^3}.$$

Число c_1 делится на m^3, то есть $c_1 = km^3$ ($k \in \mathbb{N}$). Следовательно, прогрессия имеет вид:

$$c_1 = km^3, \quad c_2 = km^2n, \quad c_3 = kmn^2, \quad c_4 = kn^3.$$

Перемножаем числа $c_1, \ldots, c_5$:

$$1512 = k^4m^6n^6c_5.$$

Снова получаем противоречие: 1512 не может делиться на шестую степень натурального числа $n > 1$. Поэтому ответ на вопрос пункта б) — отрицательный.

► Заметим, что из пункта б) следует пункт а). В самом деле, если среди сомножителей $c_1, \ldots, c_5$ не найдётся четырёх членов геометрической прогрессии, то пяти членов не найдётся и подавно. Поэтому решение можно было бы начать сразу с пункта б). Мы привели отдельное решение для пункта а) из методических соображений. ◄

в) Предъявляем соответствующий пример: $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1 = 1512$. Числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $3/2$.

► Пример найден следующим образом. Предположим, что числа c_1, c_2, c_3 образуют геометрическую прогрессию:

$$c_1 = km^2, \quad c_2 = kmn, \quad c_3 = kn^2.$$

Тогда $1512 = k^3m^3n^3c_4c_5$. Глядя на разложение (62) числа 1512 на простые множители, берём $k = 1$, $m = 2$, $n = 3$, $c_4 = 7$, $c_5 = 1$. ◄

Задача 67. Ответ: 155.

Решение. Числа вида $n(n+1)/2$ будем называть запрещёнными. Вот начало последовательности запрещённых чисел: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Пусть a и d — первый член и разность арифметической прогрессии. Так как число 1 запрещённое, то $a \geqslant 2$. Так как члены прогрессии — различные натуральные числа, то $d > 0$.

Если $d = 1$, то прогрессия будет содержать запрещённое число — например, 10. Если $d = 2$, то прогрессия также будет содержать запрещённое число — например, 10 для чётного a и 15 для нечётного a. Стало быть, $d \geqslant 3$.

Сумма S первых 10 членов прогрессии равна:

$$S = \frac{2a + 9d}{2} \cdot 10 = 10a + 45d.$$

С учётом полученных неравенств имеем оценку:

$$S \geqslant 10 \cdot 2 + 45 \cdot 3 = 155.$$

Нижнее значение 155 нашей оценки реализуется для прогрессии с $a = 2$ и $d = 3$ (то есть для прогрессии $2, 5, 8, \ldots$). Остаётся показать, что эта прогрессия не содержит запрещённых чисел.

Под номером k в данной прогрессии идёт число $2 + 3(k-1) = 3k - 1$. Нам нужно доказать, что равенство

$$3k - 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

невозможно ни при каких k и n. Перепишем это равенство в виде:

$$6k = n(n+1) + 2.$$

Число n при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1. $n = 3m \;\Rightarrow\; 6k = 3m(3m+1) + 2.$
2. $n = 3m + 1 \;\Rightarrow\; 6k = (3m+1)(3m+2) + 2 = 9m^2 + 9m + 4.$
3. $n = 3m + 2 \;\Rightarrow\; 6k = (3m+2)(3m+3) + 2 = 3(3m+2)(m+1) + 2.$

Всюду имеем противоречие: левая часть $6k$ делится на 3, а правая часть на 3 не делится (остаток 2 в первом и третьем случаях, остаток 1 во втором случае).

Таким образом, прогрессия $2, 5, 8, \ldots$ действительно не содержит запрещённых чисел. Поскольку для неё $S = 155$, то 155 — наименьшее значение величины S.

Задача 68. Ответ: а) да; б) нет.

Решение. Если среднее арифметическое любых 27 чисел набора меньше 2, то сумма любых 27 чисел набора меньше $27 \cdot 2 = 54$. Будучи натуральным числом, эта сумма не превосходит 53.

Обозначим S максимальную сумму 27 чисел данного набора. Итак, $S \leqslant 53$.

а) Да, может. Такой набор содержит 13 единиц, 17 двоек и 3, 4, 5. Для него, очевидно,

$$S = 3 + 4 + 5 + 17 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 53.$$

► Наводящее соображение очень простое. Если есть ровно 13 единиц и 3, 4, 5, то оставшиеся 17 вакансий заполняются как минимум двойками. Вот и возьмём набор с этими 17-ю двойками! Ясно, что максимальная сумма S получится, если в качестве слагаемых взять 3, 4, 5 и все двойки, добрав остаток единицами. ◄

б) Предположим, что набор содержит k единиц ($0 \leqslant k \leqslant 12$). Остальные $30-k$ чисел набора (помимо 3, 4, 5) назовём вакантными. Вакантных чисел, стало быть, не менее 18, и каждое вакантное число не меньше 2.

Таким образом, наш набор содержит 3, 4, 5 и восемнадцать чисел, не меньших 2; остальные числа набора не меньше 1. Для максимальной суммы S тогда получаем:

$$S \geqslant 3+4+5+18\cdot 2+6\cdot 1 = 54.$$

Данное неравенство показывает, что набор не может содержать менее 13 единиц.

в) Заметим сразу, что если набор содержит не менее 16 единиц, то $16\cdot 1+3+4+5=28$. Поэтому остаётся разобрать случаи, когда количество k единиц в наборе менее 16.

Остальные $30-k$ чисел (помимо 3, 4, 5) продолжаем называть вакантными.

- $k=13$. Легко видеть, что набор, предъявленный в пункте а), оказывается единственным набором с ровно тринадцатью единицами. В самом деле, для любого другого такого набора сумма 17-ти вакантных чисел будет больше $17\cdot 2=34$, и сумма S станет больше 53.

  А для предъявленного набора имеем: $3+4+5+8\cdot 2=28$.

- $k=14$ или $k=15$. Заметим, что среди вакантных чисел обязательно найдётся двойка. В самом деле, иначе все вакантные числа (которых, соответственно, 16 или 15) будут не меньше 3, и тогда их сумма окажется как минимум $15\cdot 3=45$, что противоречит условию.

  Остаётся взять 14 единиц и эту двойку: $14\cdot 1+2+3+4+5=28$.

Доказательство закончено.

Задача 69. Ответ: а) 48; б) отрицательных; в) 12.

Решение. Напомним, что среднее арифметическое нескольких чисел есть сумма этих чисел, делённая на их количество.

Пусть на доске написано n чисел. Тогда их сумма: $S=-7n$. Обозначим: p — количество положительных чисел, m — количество отрицательных чисел, z — количество нулей. Таким образом, $n=p+m+z$.

Пусть S_+ и S_- — суммы положительных и отрицательных чисел соответственно. Имеем: $S_+=6p$, $S_-=-12m$, и так как $S=S_++S_-$, то:

$$-7n=6p-12m.$$

а) Правая часть данного равенства делится на 6. Поскольку 6 и 7 взаимно просты, число n делится на 6. Между числами 42 и 54 есть только одно такое число: $n=48$.

б) Из равенства $-7\cdot 48=6p-12m$ получаем после сокращения на 6:

$$2m-p=56.$$

Кроме того:

$$p+m+z=48.$$

Сложим полученные равенства: $3m + z = 104$. Так как 104 при делении на 3 дает остаток 2, число z также даёт остаток 2: $z = 3k + 2$. Отсюда: $3m + 3k + 2 = 104$, или

$$m = 34 - k.$$

Соответственно,

$$p = 2m - 56 = 2(34 - k) - 56 = 12 - 2k.$$

Составляем разность: $p - m = (12 - 2k) - (34 - k) = -22 - k < 0$, так что $p < m$ — отрицательных чисел написано больше.

в) Из равенства $p = 12 - 2k$ видим, что $p \leqslant 12$.

Приведём пример с $p = 12$ (тогда $k = 0$, $z = 2$, $m = 34$). Пусть написано 12 чисел 6, 34 числа -12 и два нуля. Этот набор удовлетворяет условию задачи: среднее арифметическое положительных чисел равно, очевидно, 6; среднее арифметическое отрицательных чисел равно -12, а среднее арифметическое всех чисел:

$$\frac{12 \cdot 6 + 34 \cdot (-12)}{48} = -7.$$

Следовательно, наибольшее возможное количество положительных чисел равно 12.

Задача 70. Ответ: 1 и 4455.

Решение. 1) Очевидно, что сумма S окажется наибольшей, если все числа взять с плюсом. Чтобы проще было вычислить эту сумму, осуществим небольшое алгебраическое преобразование. Обозначим $a_1 = 11$, $a_2 = 12$, ..., $a_9 = 19$ и $b_1 = 3$, $b_2 = 4$, ..., $b_6 = 8$. Имеем:

$$S = (a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots + a_1b_6) + (a_2b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_2b_6) + \ldots + \\ + (a_9b_1 + a_9b_2 + \ldots + a_9b_6). \quad (63)$$

Преобразуем:

$$S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_9)b_1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_9)b_2 + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_9)b_6 = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_9)(b_1 + b_2 + \ldots + b_6).$$

Тогда

$$S = (11 + 12 + \ldots + 19)(3 + 4 + \ldots + 8) = 4455.$$

2) Если в сумме (63) заменить какой-либо знак плюс на минус, то чётность числа S не поменяется. В самом деле, если перед слагаемым a_ib_j поставить минус, то S заменится на $S - 2a_ib_j$ и потому сохранит свою чётность.

Полученное число 4455 является нечётным. Следовательно, при любой расстановке знаков в (63) значение выражения останется нечётным. В частности, оно не может быть нулём.

Единицу получить можно. Например:

$$(11 + 12 - 13 + 14 + 15 + 16 - 17 - 18 - 19)(-3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) = 1.$$

► Идея нахождения нужной расстановки очевидна: добиться равенства единице каждой скобки. Со второй скобкой всё просто: группируем числа последовательно в пары и нужным образом чередуем знаки.

В первой скобке лучше начать суммировать с конца: $19 + 18 + 17 = 54$, $16 + 15 + 14 = 45$. Эти суммы отличаются на 9, и необходимое слагаемое 10 мы построим из оставшихся чисел: $11 + 12 - 13 = 10$. ◄

Задача 71. Ответ: 3 и 1161.

Решение. Первый набор содержит шесть чисел; пусть $a_1 = \pm 6$, $a_2 = \pm 7$, ..., $a_6 = \pm 11$. Второй набор содержит девять чисел; пусть $b_1 = \pm 9$, $b_2 = \pm 10$, ..., $b_9 = \pm 17$.

По условию имеем сумму:

$$\begin{aligned} S = {} & (a_1 + b_1) + (a_1 + b_2) + \ldots + (a_1 + b_9) + \\ & + (a_2 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_2 + b_9) + \\ & \ldots \\ & + (a_6 + b_1) + (a_6 + b_2) + \ldots + (a_6 + b_9). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$S = 9(a_1 + a_2 + \ldots + a_6) + 6(b_1 + b_2 + \ldots + b_9),$$

или

$$S = 9A + 6B,$$

где $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_6$ и $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_9$.

1) Очевидно, что сумма S будет наибольшей, если все числа взять с плюсом:

$$S_{\max} = 9 \cdot (6 + 7 + \ldots + 11) + 6 \cdot (9 + 10 + \ldots + 17) = 1161.$$

2) Заметим, что среди чисел $a_1, \ldots, a_6$ ровно три нечётных. Сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна; значит, A нечётно. Поэтому и $S = 9A + 6B$ нечётно (поскольку $6B$ чётно).

Кроме того, S делится на 3 (поскольку $9A$ и $6B$ делятся на 3).

Наименьшее по модулю нечётное число, делящееся на 3, есть 3. Стало быть, $|S| \geqslant 3$ (оценка). Приведём пример расстановки знаков, при которой в оценке достигается равенство:

$$9 \cdot (-6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11) + 6 \cdot (-9 + 10 - 11 - 12 - 13 - 14 + 15 + 16 + 17) = 3.$$

Таким образом, $|S|_{\min} = 3$.

► Как мы додумались до этого примера? Сумма $9A + 6B$ равна трём, если, например $A = 1$ и $B = -1$. Получить для A значение 1 очень легко: просто группируем числа друг за другом в пары и чередуем нужным образом знаки.

Для величины B так не выйдет, поэтому начнём суммировать с конца: $17 + 16 + 15 = 48$. Теперь заметим, что $14 + 13 + 12 + 11 = 50$, что отличается от 48 на 2. Недостающую единицу сделаем из оставшихся чисел 9 и 10. ◄